MASTER
NEGATIVE
NO. 94-82217-3

COPYRIGHT STATEMENT

The copyright law of the United States (Title 17, United States Code) governs the making of photocopies or other reproductions of copyrighted materials including foreign works under certain conditions. In addition, the United States extends protection to foreign works by means of various international conventions, bilateral agreements, and proclamations.

Under certain conditions specified in the law, libraries and archives are authorized to furnish a photocopy or other reproduction. One of these specified conditions is that the photocopy or reproduction is not to be "used for any purpose other than private study, scholarship, or research." If a user makes a request for, or later uses, a photocopy or reproduction for purposes in excess of "fair use," that user may be liable for copyright infringement.

The Columbia University Libraries reserve the right to refuse to accept a copying order if, in its judgement, fulfillment of the order would involve violation of the copyright law.

Author:
Bagliano, Cesare

Title:
Calcolo commerciale e bancario

Place:
Milano

Date:
1921

94-8221-3
MASTER NEGATIVE #

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DIVISION

BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

ORIGINAL MATERIAL AS FILMED - EXISTING BIBLIOGRAPHIC RECORD

BUSINESS
481
B14 Bagliano, Cesare
... Calcolo commerciale e bancario; ad uso degli istituti tecnici e delle scuole di commercio.
Milano, Hoepli, 1921.
xii, 235 p. tables. 21½ cm.

Presentation copy with author's signature.

RESTRICTIONS ON USE:

TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35mm REDUCTION RATIO: 12X IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB

DATE FILMED: 9-28-94 INITIALS: PB

TRACKING # : MSH 02056

FILMED BY PRESERVATION RESOURCES, BETHLEHEM, PA.

2.0 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

1.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

PM-MGP 13"x18"
METRIC GENERAL PURPOSE TARGET
PHOTOGRAPHIC

200 mm

150 mm

100 mm

1.0

1.1

1.25

1.4

1.6

1.8

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890

1.0 mm

1.5 mm

2.0 mm

2.5 mm

A5

A4

PRECISION℠ RESOLUTION TARGETS

Century

1303 Geneva Avenue
St. Paul, MN 55119

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890

4.5 mm

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

3.5 mm

D481 B14
Columbia University
in the City of New York
LIBRARY

School of Business
The Montgomery Library
of
Accountancy

Given by

to Prof. R. H. Montgomery
with admiration
Bagliano
Alessandria, Italy
Jan. 18, 1928.

CALCOLO
COMMERCIALE E BANCARIO

DOTT. RAG. CESARE BAGLIANO
dell'Istituto Tecnico di Alessandria

CALCOLO
COMMERCIALE E BANCARIO

AD USO DEGLI

ISTITUTI TECNICI E DELLE SCUOLE DI COMMERCIO

ULRICO HOEPLI
EDITORE LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO
—
1921

Mont
Sept 9
R. B. Kester
5-31-28

PROPRIETÀ LETTERARIA

D481
B14

Milano — Tipografia Umberto Allegretti — Via Orti, 2.

ASP Nn. 23

INDICE

Pag.

NOTE: I. *Progressioni* IX

II. *Calcoli percentuali* X

CAP. I. *Interesse, considerazioni generali.* — 1. Confronto fra valori di diversa scadenza. - 2. Concetto dell'interesse e sconto. - 3. Definizioni e problemi generali; simboli 1

CAP. II. *Interesse semplice.* — 4. Definizione e formule generali; sconto. - 5. Confronto fra montante e valore attuale; sconto razionale. - 6. *Osservazione:* tassi equivalenti. - 7. Scomposizione della formula generale; i prontuari. - 8. Formule derivate: l'anno commerciale. - 9. Divisori fissi. - 10. I divisori fissi e i casi speciali. - 11. Applicazioni delle parti aliquote. - 12. Il procedimento di Thoyer. - 13. Il procedimento di Cauchy. - 14. Adequati di tempo e cambiamenti di scadenza. - 15. Equivalenze di gruppi di capitali 5

CAP. III. *Interesse composto.* — 16. Definizione e formule generali, sconto. - 17. Tassi equivalenti. - 18. Formula generale per tempo espresso in frazioni di periodo di tasso. - 19. Confronto fra tasso proporzionale e tasso equivalente. - 20. L'interesse composto *discreto* ed il *continuo*. - 21. Sconto composto discreto, confronto tra le diverse specie di interesse. - 22. Formule derivate. - 23. Determinazione di r nell'I. C. D. - 24. Determinazione del tempo nell'I. C. D. - 25. Altre formule derivate. - 26. Osservazioni sul tasso: il tasso convertibile. - 27. Adequati di tempo. - 28. Regola di falsa posizione 27

CAP. IV. *Periodicità.* — 29. Definizioni. - 30. Simboli. - 31. *Periodicità ad interesse semplice, costanti.* Formula generale. - 32. Formule derivate. - 33. Osservazioni sul modo di impostare il problema generale e concetto dell'ammortamento. - 34. Osservazioni sulla determinazione di n. - 35. Applicazioni. - 36. *Periodicità ad interesse composto, costanti.* Formula generale. - 37. Formule derivate. - 38. Perpetuità. - 39. Periodicità variabili: *a*) in progressione aritmetica. - 40. *b*) in progressione geo-

Pag.

metrica. - 41. Ammortamento. - 42. *Questioni inverse.* Determinazione di *r* nelle periodicità limitate. Osservazioni generali e formule. - 43. Nelle perpetuità. Nelle periodicità in progressione geometrica. - 44. Determinazione di *m*. - 45. Determinazione di *n*. - 46. Caso delle periodicità di ammortamento. - 47. Le quote di capitale. Nelle p. costanti; relazioni tra di loro, e con la rata. - 48. Nelle periodicità in progressione. - 49. Piano d'ammortamento. - 50. Determinazione del debito residuo. - 51. Altri procedimenti. - 52. Questioni diverse. - 53. Osservazione . . 40

Cap. V. *Sui riparti.* — 54. Definizioni e problema generale. - 55. Osservazioni sui problemi pratici. Riparto composto e riparto complesso 71

Cap. VI. *Della regola catenaria.* — 56. Deduzione. - 57. Osservazioni sulla applicabilità. - 58. Altre osservazioni 77

Cap. VII. *Sulle misure.* — 59. Osservazioni generali sulle unità e sui sistemi di misure. Il sistema metrico. - 60. Misure speciali. - 61. Principali unità di misura non appartenenti al sistema metrico decimale. - 62. Calcoli 79

Cap. VIII. *Calcoli relativi alle mescolanze.* — 63. Del titolo. - 64. Modi di indicarlo. - 65. Alcuni calcoli. - 66. Questioni sui miscugli. Diretta. - 67. Questione inversa. - 68 e 69. Osservazioni. - 70. La prova. - 71. Casi speciali. - 72. Variazione del titolo . 87

Cap. IX. *Moneta.* — 73. La misura dei valori. - 74. Il mezzo di scambio. Il biglietto di banca. - 75. La moneta metallica. - 76. Monete divisionarie. - 77. Il sistema del cambio aureo. - 78. Sistemi monetari - 79. Definizioni. - 80. Parità. - 81. Convenzioni monetarie. - 82. Principali unità monetarie. - 83. Calcoli. - 84. Prezzi dei metalli preziosi. - 85. Il corso dei biglietti 101

Cap. X. *La cambiale.* — 86. Concetto. - 87. Specie, requisiti. - 88. Scadenza. - 89. Girata. - 90. Accettazione. - 91. Avallo. - 92. Pagamento. - 93. Protesto. - 94. Azione di regresso. - 95. Assegno. - 96. Lo sconto cambiario. - 97. Tasse . . 115

Cap. XI. *Del cambio.* — 98. Pagamenti a distanza, e parità pratiche. - 99. Punti monetari. - 100. Modo di quotazione. - 101. Il corso dei cambi ed i tassi di sconto. - 102. Calcoli sulla negoziazione delle divise estere. Formule generali. - 103. Regole ed osservazioni. - 104. Calcoli colle spese. - 105. Scelta fra la carta breve e la carta lunga. - 106. Scelta fra la tratta e la rimessa. - 107. Osservazioni sulla scelta precedente. - 108. Cambio indiretto. Listino cifrato. Scelta ripetuta fra tratta e rimessa. - 109. Scelta della piazza più conveniente per acquistare o vendere una data divisa. - 110. Calcoli per ordini di banca. Osservazioni, formule, regole ed applicazioni. - 111. Ordini al netto di spese. - 112. Distinta di negoziazione 123

Pag.

Cap. XII. *Valori mobiliari.* — 113. Origine e scopo. La Borsa. I corsi. - 114. Classificazione. - 115. Principali titoli del debito pubblico italiano. - 116. Emissione dei titoli rappresentanti crediti. - 117. Emissione delle azioni. - 118. Taglio. Trasmissione. - 119. Rimborso. Conversione. - 120. Tasso effettivo per il debitore. - 121. Caso degli aggravi periodici a carico del debitore. - 122. I titoli rimborsabili in una sol volta. - 123. Parità. - 124. I piani d'ammortamento. - 125. Corsi e quotazioni. - 126. Consuetudini diverse. - 127. Calcoli. - 128. Il tasso effettivo per il creditore. - 129. Calcolo del buono d'opzione. - 130. Calcoli diversi. Quotazioni equivalenti. - 131. Scelta della piazza d'acquisto e di vendita. - 132. I valori mobiliari ed il cambio. - 133. Contratti di borsa. Classificazione. - 134. Contratto a premio per potere o no ritirare. - 135. Contratto per potere o no consegnare. - 136. Contratto di doppia opzione. - 137. Contratto di aggiunta. - 138. Operazioni combinate. - 139. Rappresentazione della situazione dell'operatore. - 140. Rappresentazione grafica. - 141. Liquidazione dei contratti a termine. La stanza di compensazione. - 142. Proroga della situazione. Riporto. - 143. Diritto di sconto. - 144. Ammissione alla quotazione. - 145. Tasse ed imposte 160

Cap. XIII. *Scadenza comune.* — 146. Deduzione della formula generale da quella della scadenza media. - 147. Formule derivate. - 148. La forma dei calcoli e l'effetto di essa sul procedimento. - 149. Nomenclatura. - 150. Il metodo diretto. - 151. Il metodo a chiusura presunta. - 152. Il metodo indiretto. - 153. I metodi scalari. - 154. Casi speciali. Conti per depositi presso banche. Esame delle diverse convenzioni. - 155. Conti a tasso variabile. - 156. Conti a tasso non reciproco. Diversi casi. - 157. Conti in moneta diversa da quella di conto di chi li tiene. - 158. Il contratto di conto corrente. *Conti nostri* e *Conti loro.* Esempi 206

NOTE

I.

PROGRESSIONI.

In quanto segue gli indici dei numeri a denotano l'ordine di successione.

A) *Aritmetiche* $\div\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_{n-1}\ a_n$

I. Definizione: $a_k - a_{k-1} = d$ costante $\neq 0$.

II. $a_k = a_r + (k-r)\,d$

III. $a_{k+1} + a_{n+k} = (a_1 + k\,d) + (a_n - k\,d) = a_1 + a_n$

IV. $\overset{n}{\underset{1}{S}} a_k = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\, n$

B) *Geometriche* $\div\div\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots . a_{n-1}\ a_n$

I. Definizione: $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = q$ costante $\neq 1$

II. $a_k = a_r\, q^{k-r}$

III. Nella seguente proporzione continua, componendo, ed indicando con S la somma dei termini da a_1 ad a_n, si ha successivamente:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots . = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q;$$

$$\frac{S - a_1}{S - a_n} = q$$

$$S = \frac{a_1 - a_n}{1-q} = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

IV. Supposto $|\,q\,| < 1$ ed n crescente senza limite si ha

$$\lim_{n=\infty} S = \lim\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1\,q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n=\infty}\frac{a_1\,q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

V. Se, colle ipotesi IV, si prende quale valore di S la somma di un numero finito h di termini, si commette un errore uguale alla somma

di tutti i successivi. Indicandolo con R_h

$$R_h = \frac{a_{h+1}}{1-q}$$

Ma $a_{h+1} = a_h\, q = a_1\, q^h$, e posto $q = \frac{1}{p}$ ($|p| > 1$), avremo per R_h le espressioni seguenti

$$R_h = \frac{a_h\, q}{1-q} = \frac{a_h}{p-1}$$

$$R_h = \frac{a_1}{p^h\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \frac{a_1}{p^{h-1}(p-1)}$$

VI. Si può determinare h (*intero*) in modo che R_h sia minore in valore assoluto di un numero positivo E. Ma è più conveniente, in generale, determinare l'importo del termine a_h, i cui successivi danno una somma (errore) minore di E. Si deve avere

$$\frac{a_h}{p-1} < E$$

e quindi deve essere

$$a_h < E(p-1)$$

Perciò, raggiunto un termine che soddisfa la disuguaglianza precedente, si sospende il calcolo dei successivi.

II.

CALCOLI PERCENTUALI.

È consuetudine frequente esprimere i valori di una grandezza riferendoli ad 1, 100, 1000 unità di un'altra grandezza da cui la prima dipende o di speciali valori della stessa grandezza.

Si esprimono in tal modo gli utili e le perdite, le spese, le provvigioni, i ribassi (in percentuali dei capitali impiegati o ricavati) le variazioni dei prezzi (su un prezzo di base — *numeri indici*) quelle delle quantità, i cali, i prodotti (sulla quantità originale o impiegata nella produzione) gli errori dei numeri approssimati; i premi d'assicurazione, alcune tasse ed imposte, ed altri.

Le questioni relative sono applicazioni della regola del tre semplice.

Diciamo: *base* la grandezza su cui il $^0/_0$ è calcolato, *variabile* quella che è misurata dalla percentuale, e ne indichiamo rispettivamente con B e V i valori. Se base e variabile sono sotto un certo aspetto omogenee può avvenire di dover considerare la loro somma algebrica $B \pm V$.

Da quanto precede si ha la proporzione:

a) $$B : 100 = V : {}^0/_0$$

dalla quale, componendo o dividendo, con facili passaggi si ottiene

b) $$B \pm V : 100 \pm {}^0/_0 = B : 100$$

c) $$B \pm V : 100 \pm {}^0/_0 = V : {}^0/_0$$

Con queste proporzioni si risolvono i principali quesiti.

Dalle *b*) e *c*) si possono avere delle espressioni frazionarie con denominatore $100 \pm {}^0/_0$. Dividendo per 100 sopra e sotto ed indicando con p il quoziente relativo al $^0/_0$ il denominatore diventa $1 \pm p$, e se p è < 1, piccolo e si presta al calcolo mentale si può considerare la frazione

$$\frac{K}{1 \pm p}$$

come il limite della somma di una progressione geometrica con ragione $\mp p < 1$, ed invece di fare la divisione, prendere il numeratore K come il primo termine della progressione, calcolare i due o tre successivi e sommare algebricamente (Nota I, B. IV e segg.).

***Applicazioni.** — Si ha su un debito un ribasso del 2 $^0/_0$ e si pagano a saldo L. 2200,10. Trovare il debito ed il ribasso.*

La base del $^0/_0$ è il debito nominale (B), 2200,10 è la base meno il ribasso ($B - V$). Perciò

$$2200{,}10 : 100 - 2 = V : 2 \qquad 2200{,}10 : 100 - 2 = B : 100$$

$$V = \frac{2200{,}10 \cdot 2}{100-2} = 44{,}90 \qquad B = \frac{2200{,}10 \cdot 100}{100-2} = 2245$$

Invece di fare le due divisioni per $100 - 2$ si applichi quanto fu osservato ultimamente

$$V = \frac{22{,}001 \cdot 2}{1 - {}^2/_{100}} \qquad B = \frac{2200{,}10}{1 - {}^2/_{100}}$$

$22{,}001 \cdot 2$	$= 44{,}0020$		2200,10
$2\ ^0/_0$	8800	$2\ ^0/_0$	44,002
»	176	»	8800
»	3	»	176
V	44,88999 (44,90)	»	3
		B	2244,9999 (2245)

Si è venduto una merce per L. 1323 col guadagno del 5 $^0/_0$ sul costo. Trovare il costo e l'utile.

La base è il costo, 1212 è base più l'utile ($B + V$). Perciò

$$1323 : 100 + 5 = V : 5 \qquad V = \frac{1323 \cdot 5}{100 + 5} = 63$$

$$1323 : 100 + 5 = B : 100 \qquad B = \frac{1323 \cdot 100}{100 + 5} = 1260$$

Operando come sopra

$$V = \frac{13{,}23 \cdot 5}{1 + {}^{5}/_{100}}$$

$13{,}23 \cdot 5$	$= 66{,}15$	
$- 5\ {}^{0}/_{0}$	$3{,}3075$	
$+$ »	1653	
$-$ »	82	
V	$62{,}9996$	(63)

$$B = \frac{1323}{1 + {}^{5}/_{100}}$$

	1323	
$- 5\ {}^{0}/_{0}$	$66{,}15$	
$+$ »	$3{,}3075$	
$-$ »	1653	
$+$ »	82	
B	$1260{,}0004$	(1260)

Si è venduta una merce col guadagno del 20 ${}^{0}/_{0}$ sul ricavo. Quale è il ${}^{0}/_{0}$ calcolato sul costo?

La base è il costo, perciò il ricavo $100 = B + V$, e $V = 20$, $B = 80$.

$$80 : 20 = 100 : {}^{0}/_{0} \qquad {}^{0}/_{0} = \frac{20 \cdot 100}{80} = 25.$$

Osservazione. Se B è una somma in Lst, conviene moltiplicare il ${}^{0}/_{0}$ per 20 (trasformarlo in scellini), e poi calcolare V in scellini. Qualche volta è uso in Inghilterra di indicare, invece del ${}^{0}/_{0}$, i scellini di variabile per ogni Lst di base.

CAPITOLO PRIMO.

INTERESSE - CONSIDERAZIONI GENERALI

1. — Se una ricchezza sarà disponibile solo dopo trascorso un certo tempo, il suo valore oggi è minore e dipende dalla lunghezza del tempo d'attesa — astrazione fatta dal pericolo di perdite per avvenimenti avversi imprevedibili, e nulli essendo il lavoro e la spesa per ottenerla. Segue che due ricchezze disponibili in momenti diversi non si possono tra loro confrontare senza opportune correzioni, poichè quella disponibile più tardi vale, relativamente, meno dell'altra.

Le ragioni di questa perdita di valore sono diverse: se la ricchezza in questione è utile solo indirettamente, cioè un capitale, se ne perdono i frutti ottenibili nel frattempo; se è utile direttamente, cioè un bene di consumo, si deve rimandare con sacrificio a più tardi la soddisfazione di bisogni che essa altrimenti potrebbe subito appagare.

Quindi, se si cede una ricchezza presente contro promessa di un'altra futura si pretenderà che questa sia allora di grandezza tale da valere oggi almeno quanto quella ceduta, e si vorrà tanto maggiore quanto più lungo deve essere il tempo d'attesa, essendo evidentemente più grande la perdita di valore o deprezzamento. Questo non potrà mai diventare uguale all'intero valore della ricchezza se non quando la disponibilità non ne sia rimandata ad un momento infinitamente lontano.

2. — Nella pratica è frequente il confronto fra ricchezze disponibili in tempi diversi e quindi sono frequenti i calcoli necessari per effettuarlo.

Osserviamo che, se da quanto si è detto risulta che tra il valore presente e futuro d'una ricchezza ed il tempo intermedio c'è una certa relazione, non si sa ancora di che specie essa sia.

Si provvede a stabilirla con opportune convenzioni:

Dapprima si suppone che per un dato tempo d'attesa i valori presenti di ricchezze simili siano direttamente proporzionali ai valori futuri.

Poi si deve stabilire la misura del deprezzamento per un tempo determinato, perchè le ricchezze non sono sempre ugualmente richieste od apprezzate. In fatti per un tempo d'attesa fisso, la perdita di valore delle ricchezze future che sono capitali sarà più o meno forte secondo che i frutti altrimenti ottenibili sono più o meno grandi; se si tratta di altre ricchezze tale perdita sarà grande se quelle oggi disponibili sono scarse i bisogni sono molto sentiti e richiedono pronta soddisfazione; piccola se le ricchezze sono abbondanti e poco sentito il bisogno di esse. *Questo coefficiente, che misura il deprezzamento, per essere determinato deve riferirsi ad un certo periodo di tempo e non potrà mai essere enunciato indipendentemente dal suo periodo.* Esso si chiama *tasso* o *saggio* o *ragione* e si indica con r.

Si calcola ordinariamente così: Sia C_k l'importo di una ricchezza in un momento qualunque e sia C_{k+1} l'importo di un'altra, *equivalente alla prima* ma disponibile in un momento successivo $k+1$. Sarà $C_{k+1} > C_k$. Si prende per tasso il rapporto $\frac{C_{k+1} - C_k}{C_k} = r$, da cui $C_{k+1} - C_k = C_k r$, e $C_{k+1} = C_k(1+r)$. Se $r = 0{,}04$ per un anno, una ricchezza di valore 1 è equivalente ad un'altra di 1,04, fra un anno. Questo *tasso* si dice d'*interesse*.

Si poteva misurare il deprezzamento in un altro modo, anzi questo per il primo si presenta. Se C'_{k+1} e C'_k sono i *valori presenti* di una *stessa ricchezza* supposta rispettivamente disponibile dopo il tempo $k+1$ e k, è $C'_{k+1} < C'_k$.

Si può prendere come tasso $\frac{C'_k - C'_{k+1}}{C'_k} = r'$, da cui $C'_k - C'_{k+1} = C'_k r'$ e $C'_k(1-r') = C'_{k+1}$. Se $r' = 0{,}05$ vorrebbe dire che una ricchezza di valore 1 avrebbe, se fosse disponibile fra un anno il valore presente di $1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

È più generalmente usato il primo modo di calcolare il tasso.

Resta ancora da vedere come questi valori riferiti a momenti diversi siano legati alla variabile *tempo*.

In proposito vi sono due usuali *leggi convenzionali di interesse*: quella dell'interesse *semplice* e quella del *composto*. Entrambe hanno pregi e difetti. Non sono mancate proposte di matematici per rimediarvi, ma nemmeno queste scevre di inconvenienti, primo fra tutti la laboriosità della pratica applicazione, e perciò restate senza successo. Si deve tuttavia avvertire che le due leggi nominate non sono usate indifferentemente e che, nei casi pratici d'applicazione, sono semplici e sufficientemente esatte.

3. — Considerando i valori di due ricchezze ritenute equivalenti in due momenti distinti, si danno loro differente nome a seconda dei casi.

Il secondo valore in ordine crescente di tempo, C_{k+n}, è il *Montante* del primo C_k detto semplicemente *Capitale*; il primo C_k si dice anche *Valore attuale* o *scontato* del *Capitale nominale* C_{k+n}.

La differenza fra il *Montante* ed il *Capitale* si dice *Interesse* o *Frutto*; fra il capitale *nominale* e l'*attuale, sconto*.

Riguardo al tempo facciamo la convenzione di considerare *positivo* il numero che misura il *tempo trascorso* (come nel problema: trovare il Montante di un dato capitale, dopo un certo tempo); *negativo* quello che misura *tempo non ancora decorso* rispetto ad un momento determinato (come nel problema: trovare il valore attuale di un capitale che avrà un certo valore dopo un dato tempo).

Nei problemi d'*Interesse*, tempo positivo; di sconto, negativo.

Se sono dati due valori di ricchezze in momenti diversi equivalenti, si divida il tempo che passa tra quei momenti in n parti eguali e si indichi con C_0 il valore iniziale con C_1, $C_2 \ldots$, C_{n-1} i valori intermedi e con C_n il valore finale.

Chiameremo *incremento assoluto* di un capitale nel t^{mo} periodo del suo impiego la differenza $C_t - C_{t-1}$ ed *incremento relativo* il rapporto $\frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}}$ (cioè il tasso [1]).

(1) Queste denominazioni ed il modo di definire l'interesse semplice ed il composto, come in seguito, sono dovuti a C. Ciamberlini: *Sull' interesse composto,* in *Supplemento al periodico di matematica*, novembre 1900.

CAPITOLO SECONDO.

INTERESSE SEMPLICE

Si dice che un capitale C_0 è impiegato ad interesse semplice quando i suoi *incrementi assoluti* per periodi di tempo uguali sono uguali; cioè quando

$$C_1 - C_0 = C_2 - C_1 = C_3 - C_2 = \ldots = C_n - C_{n-1}$$

Per questa espressione è dunque costante la differenza tra un valore di C ed il precedente, quindi i $C_0\ C_1\ C_2 \ldots C_n$ costituiscono una progressione aritmetica di differenza $C_1 - C_0$. Per ciò abbiamo $C_n = C_0 + (C_1 - C_0)\, n = C_0 + \frac{C_1 - C_0}{C_0}\, C_0\, n$.

Ma $\frac{C_1 - C_0}{C_0}$ è il tasso d'interesse durante il primo periodo di tempo; indicando con r questo tasso e con I il *frutto* complessivo $C_n - C_0$

$$1)\quad C_n = C_0 + C_0\, r\, n = C_0 (1 + rn)$$
$$2)\quad I = C_n - C_0 = C_0\, r\, n \qquad (1)$$

(1) Si può trovare le formule 1) e 2) anche così:
L'interesse semplice è direttamente proporzionale al tempo:
se $C_n - C_0$ è il frutto di C_0 nel tempo n
$\frac{C_n - C_0}{C_0}$ è il frutto del capitale 1 nello stesso tempo
$\frac{C_n - C_0}{C_0\, n}$ è il frutto del capitale 1 nel tempo 1, cioè il tasso per quella unità di tempo.
Quindi: $\frac{C_n - C_0}{C_0\, n} = r$ di cui si hanno subito le formule suddette.

Coll'interesse semplice, il frutto è proporzionale direttamente al tempo.

Nella 1) cambiando n in $-n$ si ha

$$3) \quad C_{-n} = C_0 (1 - r n)$$

formula che dà il valore attuale di un capitale C_0 disponibile fra il tempo n. La differenza s tra il valore nominale ed il valore attuale, cioè lo *Sconto* sarà

$$s = C_0 - C_{-n} = C_0 - C_0 (1 - r n) = C_0 r n$$

cioè uguale al frutto ad interesse semplice calcolato sul valore nominale.

Dalle 1) e 3) si ricava

$$1') \quad C_0 = \frac{C_n}{1 + r n} = C_n - C_n r n + C_n (r n)^2 - c_n (r n)^3 + \dots$$

$$3') \quad c_0 = \frac{c_{-n}}{1 - r n} = C_{-n} + C_{-n} r n + C_{-n} (r n)^2 + C_{-n} (r n)^3 + \dots$$

Quando — come avviene *sempre* nelle pratiche applicazioni delle formule dell'interesse semplice — è $r n < 1$, le potenze di $r n$, per esponenti positivi crescenti, vanno diminuendo, cosicchè se $r n$ è molto piccolo si può calcolare con sufficiente approssimazione C_0 prendendo un numero limitato di termini dei secondi membri di queste eguaglianze.

5. — Si deve osservare che se si mette a frutto il valore attuale di un capitale, al medesimo tasso e tempo per cui si è scontato, non si trova più il capitale da cui si è partiti. Si ha infatti:

$$C_0 (1 - r n)(1 + r n) = C_0 (1 - r^2 n^2)$$

risultato che per $n \neq o$ è sempre minore di C_0. Così se, dovendo una somma C_0 fra il tempo n ed avendo disponibile il denaro, non si può convenire col creditore il pagamento anticipato e si deve mettere a frutto il capitale disponibile al tasso r, la somma da impiegare ora per avere fra il tempo n C_0, non deve essere $C_0 (1 - r n)$, per quello che è stato detto, ma una somma

maggiore x, tale che sia

$$x (1 + r n) = C_0$$

$$4) \quad x = \frac{C_0}{1 + r n} \quad (1)$$

Si potrà mettere a frutto una somma uguale a $C_0 (1 - r n)$ solo se il tasso a cui si potrà impiegare sarà maggiore del tasso a cui si è scontato C_0. Indicandolo con y

$$C_0 (1 - r n) = \frac{C_0}{1 + y n}$$

$$5) \quad y = \frac{r}{1 - r n} > r \quad \text{ed} \quad r = \frac{y}{1 + y n}$$

6. *Osservazione.* — Si deve ricordare che in tutti i calcoli precedenti esiste tra il tasso ed il tempo una certa relazione: il tasso si riferisce ad un tempo che è preso come unità nella misura della durata dell'impiego del capitale, cioè: tasso annuale, tempo in anni; tasso mensile, tempo in mesi; decadale, tempo in decadi. La divisione in periodi della durata dell'impiego è arbitraria. Si scelga un altro numero $n' \neq n$. Si otterrà un tasso $r_1 \neq r$.

$$r_1 : r = \frac{C_n - C_0}{C_0 n'} : \frac{C_n - C_0}{c_0 n}$$

$$r_1 : r = \frac{1}{n'} : \frac{1}{n}$$

$$r_1 = r \frac{\frac{1}{n'}}{\frac{1}{n}}$$

---

(1) Il risultato ottenuto colla 4) si considera pure come un valore attuale calcolato con un altro sconto che si dice *razionale* per distinguerlo da quello, detto *commerciale* perchè usato nella pratica degli affari, calcolato colla formula 3). Indicandolo con $C' = \frac{C_0}{1 + r n}$ abbiamo per lo sconto

I due tassi sono calcolati coi medesimi dati, capitale, durata dell'impiego, montante, sono pertanto *equivalenti.*

Siccome n ed n' sono la misura con unità differente dello stesso tempo — la durata dell'impiego —, $\frac{1}{n}$ ed $\frac{1}{n'}$ sono proporzionali alla durata dei tempi presi successivamente per unità, quindi si può dire:

Nell'interesse semplice i tassi equivalenti sono proporzionali ai rispettivi periodi.

Per ottenere un tasso equivalente ad un altro si moltiplica il tasso dato per il rapporto fra il periodo del tasso cercato e quello del tasso dato.

7. — Se nella formula 2) si fa

$$C_0 = C' + C'' + C'''$$

oppure

$$r = r' + r'' + r'''$$

o anche

$$n = n' + n'' + n'''$$

si ha

$$I = (C' + C'' + C''')\, r n = C' r n + C'' r n + C''' r n$$

oppure

$$I = C_0 (r' + r'' + r''')\, n = C_0 r' n + C_0 r'' n + C_0 r''' n$$

od anche

$$I = C_0 r (n' + n'' + n''') = C_0 r n' + C_0 r n'' + C_0 r n'''$$

Dunque: diviso in parti qualsiansi *uno* dei fattori nella formula 2), la somma degli interessi relativi a quelle parti è

---

razionale s',

$$s' = C_0 - C' = C_0 - \frac{C_0}{1 + r n} = \frac{C_0 r n}{1 + r n} = C' r n = \frac{s}{1 + r n}$$

quindi $s = s'(1 + rn)$.

Si può arrivare alle stesse conclusioni partendo dalla ipotesi della restituzione di una somma C_0 anticipata del tempo n; se si pattuisce che il pagatore abbia un compenso pari al suo sacrificio, si vede che questo deve essere uguale agli interessi perduti sulla somma effettivamente pagata cioè su C' quindi $s' = C' r n$.

uguale all'interesse ottenibile senza quella ripartizione. E reciprocamente (1).

8. — *Formule derivate*: dalla 2)

$$C_0 = \frac{I}{r n} \quad , \quad r = \frac{I}{C_0 n} \quad , \quad n = \frac{I}{C_0 r}$$

dalla 1) $C_0 = \frac{C_n}{1 + r n}$.

Essendo $C_n = C_0 + I$ abbiamo ancora

$$C_n = I + \frac{I}{r n} = I \frac{1 + r n}{r n}$$

$$I = \frac{C_n r n}{1 + r n}$$

---

(1) Questa osservazione spiega, fra altro, anche l'uso dei *prontuari d'interessi*, di cui molti tipi sono in commercio, e che sono utilissimi, nelle aziende vaste dove si fanno molti di questi calcoli, per evitare ogni arbitrio da parte del personale, e rimuovere diverse cause di errore. Sono costituite da tabelle distinte secondo i più usuali tassi; le somme situate nella stessa colonna nelle successive righe danno l'interesse per i differenti tempi, le somme situate sulla stessa riga nelle successive colonne danno l'interesse per lo stesso tempo, dei capitali 1, 2, 3... 9, rispettivamente. Esempio:

6 %

capitali / giorni	1	2	3	4	5	6	7	8	9
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
47	0,007833	0,015667	0,0 3500	0,031333	0,039167	0,047000	0,054833	0,062667	0,070500
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

L'interesse di 4.375,25 al 6 % per g. 47 si ottiene così:

4	31,3333
-3	2,3500
-7	5483
-5	391
-2	15
-5	3
4375,25	34,2725

I prontuari per l'interesse composto si usano nello stesso modo.

Se l'unità di tempo usata per misurare la durata dell'impiego è diversa da quella a cui si riferisce il tasso (*periodo di tasso*) e sia m il rapporto tra il periodo di tasso e quell'unità di tempo: da $C_n = C_0(1 + n\, r_m)$ essendo $r_m = \frac{r}{m}$ si ha

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{n}{m}\, r\right)$$

$$I = C_0\, r\, \frac{n}{m}$$

Nella pratica il tasso è dato generalmente per un capitale 100 e per un anno d'impiego (es. 5 % annuo = 0,05 per il capitale 1 e per un anno).

Se r è annuale e la durata dell'impiego espressa in mesi, $m = 12$

$$I = C_0\, r\, \frac{n}{12}$$

Il tasso sia annuale ed il tempo espresso in giorni g. Qui occorre osservare che nei calcoli commerciali d'interesse non in tutti i paesi si considera l'anno di 365 o di 366 giorni ed i mesi secondo il calendario e che su qualche piazza si hanno usi diversi secondo le applicazioni delle formule. In generale:

Considerano l'anno di 360 giorni ed i mesi secondo il calendario gregoriano le piazze italiane francesi belghe;

l'anno di 360 ed i mesi di 30 giorni le piazze tedesche olandesi scandinave;

l'anno civile di 365 (366) le piazze della Gran Bretagna e sue colonie.

Supponendo l'anno di 360 giorni abbiamo $m = 360$, quindi

$$I = \frac{C_0\, r\, g}{360}$$

Sono evidenti i cambiamenti che seguono nelle formule derivate.

9. — La formula ultima trovata è di uso frequentissimo. Si deve in proposito osservare che il numero 360 contiene moltissimi divisori e che essendo molte volte diviso esattamente da r la prima semplificazione aritmetica che si presenta consiste nel dividere numeratore e denominatore per r. Si ha dunque

$$I = \frac{C_0\, g}{360 : r}$$

Il quoziente $360 : r$ si calcola mentalmente od è dato da apposite *tavole*, si dice *divisore fisso* e si indica con D. Il prodotto $C_0\, g$ si dice in computisteria *Numero* e si può indicare con N.

$$I = \frac{C_0\, g}{D} = \frac{N}{D}$$

Se si vuol calcolare l'interesse complessivo ad un dato tasso di più capitali con segno determinato e per tempi diversi si ha

$$I = \frac{N_1}{D} \pm \frac{N_2}{D} \pm \ldots \pm \frac{N_n}{D} = \frac{N_1 \pm N_2 \pm \ldots \pm N_n}{D}.$$

Le formule derivate diventano

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{g}{D}\right) \quad C_0 = \frac{C_n\, D}{D + g} \quad C_n = I\left(1 + \frac{D}{g}\right) \quad I = \frac{C_n\, g}{D + g}$$

In qualche raro caso può essere conveniente semplificare il calcolo usando del fattore $\frac{r}{360}$ (interesse dell'unità di capitale in un giorno) dato da apposite tavole e detto *moltiplicando fisso*. Indicandolo con M

$$I = C_0\, g\, M.$$

10. — L'uso del divisore fisso non è che raramente utile se si considera l'anno civile, perchè 365 ha pochi divisori e ne risultano per la maggior parte dei tassi divisori fissi non interi, o, se interi, composti di cifre tutte o quasi tutte significative. Il calcolo è solo abbreviato quando il divisore è un numero composto di una o al più due cifre significative seguite da zeri. L'inconveniente si verifica anche per l'anno commerciale, ma

con minore frequenza perchè 36.000 ha moltissimi divisori. Si può in questi casi usare il divisore fisso di un tasso ausiliario facendo le opportune correzioni all'interesse che si ottiene. Si applica quanto è detto al n. 7.

Esempi. Dovendo calcolare l'interesse al 7,50 %, notando che $7{,}50 = 5 + 2{,}5 = 5\,(1 + {}^1/_2)$, si calcola l'interesse al 5 e si aggiunge $^1/_2$ del risultato; oppure essendo anche $7{,}5 = 6 + 1{,}5 = 6\,(1 + {}^1/_4)$ si calcola al 6 e si aggiunge $^1/_4$. Se il tasso dato è 6,8 %, essendo $6{,}8 = 6 + 0{,}6 + 0{,}2$; si calcola al 6, si aggiunge $^1/_{10}$ ed $^1/_2$ del decimo. Se il tasso è del 4,75 % essendo $4{,}75 = 5 - 0{,}25 = 5\,(1 - {}^1/_{20})$ si calcola al 5 e si toglie $^1/_{20}$.

Utilizzando la citata osservazione si possono facilitare i calcoli coll'anno civile.

Per l'anno solito di 365 giorni si osserva che i fattori di 365 sono 5 e 73, e quindi si hanno i soli divisori interi $= 3{,}65\ \%\ D\ 10.000$; $5\ \%\ D\ 7.300$; $7{,}3\ \%\ D\ 5000$. Il D più conveniente è 10.000 ma il tasso 3,65 male si presta come tasso ausiliario. Si è però trovato la seguente relazione tra il 3,65 ed il 5 %;

$$5 - 3{,}65 = 1{,}35$$

$$3{,}65\,\frac{111}{300} = 3{,}65\,({}^1/_3 + {}^1/_{30} + {}^1/_{300}) = 1{,}3505$$

così se si calcola l'interesse col D del 3,65 % e gli si aggiunge $^1/_3$, $^1/_{30}$, $^1/_{300}$ si ha l'interesse al 5,0005 %. Prendendo il risultato come ottenuto al 5 % si commette un errore per eccesso dell'1 ‰. Il 5 % come tasso ausiliario è sufficiente. In formula

$$I_5 = \frac{C_0\,g}{10000}\,(1 + {}^1/_3 + {}^1{}_{30} + {}^1/_{300}) \quad (1)$$

Si può anche osservare che

$$\frac{C_0\,r\,g}{360} - \frac{C_0\,r\,g}{365} = \frac{C_0\,r\,g}{360}\cdot\frac{1}{73}$$

Si potrebbe quindi calcolare l'interesse per l'anno di 360 giorni e togliere dal risultato $^1/_{73}$. Se, per maggiore rapidità di calcolo, si toglie $^1/_{70}$, si ottiene un valore approssimato per difetto e l'errore è di $^1/_{1703}$ dell'interesse per l'anno commerciale, molte volte trascurabile o correggibile.

(1) Dagli inglesi questa regola è chiamata: regola del *terzo, decimo e decimo: (third, tenth and tenth rule).*

Per l'anno bisestile si ottiene

$$\frac{C_0\,r\,n}{360} - \frac{C_0\,r\,n}{366} = \frac{C_0\,r\,n}{360}\cdot\frac{1}{61} = \frac{C_0\,r\,n}{360}\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{1 + \frac{1}{60}} =$$

$$= \frac{C_0\,r\,n}{360}\cdot\frac{1}{60}\left(1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2} - \dots\right)$$

$$\frac{C_0\,r\,n}{366} = \frac{C_0\,r\,n}{360}\left(1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2} - \frac{1}{60^3}\dots\right)$$

Invece di togliere dall'interesse per l'anno commerciale $^1/_{61}$ si può togliere $\frac{1}{60}$ (ed allora si commette un errore pari ad $^1/_{3660}$) e successivamente aggiungere e togliere $^1/_{60}$ della correzione precedente raggiungendo rapidamente la voluta approssimazione. Se l'errore deve essere minore di 1 millesimo, applicando quanto è detto al N. VI delle Progressioni geometriche si trova che il calcolo deve cessare quando l'ultima correzione sia minore di $0{,}001\,(60 - 1) = 0{,}059$.

II. *Altri procedimenti pratici.* — Sono i cosidetti *metodi delle parti aliquote.* Sono 3.

1°. Dalla formula $I = \frac{C_0\,g}{D}$ si ha $\frac{I}{C_0} = \frac{g}{D}$ cioè l'interesse sta al capitale come il tempo giorni al divisore fisso. Quindi: se il tempo è la centesima parte di D l'interesse è la centesima parte del capitale; se il tempo si può scomporre in una somma di parti aliquote di D, altrettanto si potrà fare dell'interesse rispetto al capitale, secondo gli stessi numeri. Importa in pratica che queste parti aliquote siano di facile calcolo.

Si trovi l'interesse su L. 4725,32 al 5 % per g. 93. $D = 7200$. Si fa $93 = 72 + 18 + 3$

g. 72	$\left(\frac{D}{100}\right)$	interesse	47,2532	$\left(\frac{C_0}{100}\right)$
» 18	($^1/_4$ 72)	»	11,8133	($^1/_4$ di 47,25...)
» 3	($^1/_6$ 18)	»	1,9688	($^1/_6$ di 11,81...)
g. 93	.	interesse	61,0353	

2°. Dalla formula $I = \frac{C_0\, g}{D}$ si ha $\frac{I}{g} = \frac{C_0}{D}$ (1). Quindi: se il capitale si può scomporre in una somma di parti aliquote del D si potrà fare altrettanto dell'interesse rispetto al numero dei giorni, secondo gli stessi numeri. Anche qui importa nella pratica che le parti aliquote siano di facile calcolo.

Coi dati dell'esempio precedente, si ha

capitale	3600	($^1/_2$ D)	interesse	46,50	($^1/_2$ g.)
»	900	($^1/_4$ 3600)	»	11,625	
»	100	($^1/_9$ 900)	»	1,2916	
»	100		»	1,2917	
»	25	($^1/_4$ 100)	»	0,3229	
»	0,30	(da 900)	»	0,0038	
»	0,02	($^1/_{15}$ 30)	»	0,0002	
capitale	4725,32		interesse	61,0352	

L'adoperare il 1° od il 2° procedimento dipende dalla facilità del calcolo, a giudizio dell'operatore. In generale si può dire solo che il 2° si presenta facile quando il capitale è un numero con poche cifre significative. Conviene l'uso di tassi ausiliari.

3°. Non si usano i divisori fissi. Dalla formula $I = \frac{C_0\, r\, g}{360}$ si ha $\frac{I}{C_0\, r} = \frac{g}{360}$. Quindi, trovato l'interesse annuale $C_0\, r$ si scompone il numero dei giorni in parti aliquote di 360 e si prendono e si sommano parti simili dell'interesse annuale.

Coi dati del solito esempio

$$C_0\, r = 4725{,}32 \cdot 0{,}05 = 236{,}266,$$

si osserva che $93 = 90 + 3$ e si ha

g.	360		interesse	L.	236,266
g.	90	($^1/_4$ 360)	L.	59,0665	($^1/_4$ 236,266)
»	3	($^1/_{30}$ 90)	»	1,9688	($^1/_{30}$ 59,06)
g.	93		L.	61,0353	

(Nel fare i calcoli colle parti aliquote per avere risultati esatti fino alla 2ª cifra decimale, se gli addendi sono in numero < 10, si devono prendere 4 cifre decimali per ciascuno di essi).

(1) In particolare, se $C_0 = D$, $I = g$, quindi se il capitale è D il suo montante è $D + g$ ed il suo valore attuale $D - g$. Osservazione che sarà utile più avanti. D può essere *qualunque*, intero o frazionario.

Per anno civile avremo, cogli stessi dati: per quello comune:

$D = 10.000$		g. 100	L. 47,2532
	5 g. L. 2,3626		
	2 » » 0,9450	» 7	» 3,3076
	al 3.65 %	g. 93	L. 43,9456
	+ $^1/_3$		» 14,6485
	+ $^1/_{30}$		» 1,4648
	+ $^1/_{300}$		» 0,1464
			L. 60,2053

Essendo l'errore di 1 $^0/_{000}$ bisognerebbe togliere circa 0,006 e si avrebbe per risultato: $60{,}199 = 60{,}20$.

Oppure:

interesse per l'anno commerciale	L. 61,0353
— $^1/_{70}$	» 0,8719
	L. 60,1634

al quale bisognerebbe aggiungere 1 cent. per ogni 16 lire cioè circa 4 cent.

Per l'anno bisestile:

interesse per l'anno commerciale		L. 61,0353
— $^1/_{60}$		— 1,0172
+ $^1/_{60}$	1,0172	+ 0,0169
		L. 60,0350

Il calcolo diretto dà appunto 60,0348.

12. *Procedimento di Thoyer.* — Serve per trovare l'interesse complessivo di più capitali, come nel caso di voler controllare un certo numero di interessi già calcolati, allo stesso tasso. Fu reso noto dal matematico Thoyer nel 1841.

Con esso si calcola sollecitamente la somma dei prodotti $C_0\, n$, può servire quindi per tempo espresso in anni, in mesi, in giorni. Prendiamo il caso dei giorni.

Osserviamo:

1°. Che un capitale impiegato per n decadi ed n_1 giorni dà un Numero uguale alla somma di quelli di 2 capitali ad esso uguali impiegati rispettivamente per n decadi e per n_1 giorni;

2°. Un capitale impiegato per n *decadi* dà lo stesso Numero di un capitale *decuplo* impiegato per n *giorni*.

Da ciò segue:

3°. Che un capitale impiegato per n decadi ed n_1 giorni dà un Numero uguale alla somma di quelli di due capitali: uno uguale al dato ed impiegato per n_1 giorni e l'altro *decuplo* impiegato per *giorni* n.

Più brevemente: $C(10 \cdot n + n_1) = (10\ C)\, n + C n_1$.

Si scompongano dunque tutti i tempi d'impiego dei capitali dati in *decadi* e *giorni* e si supponga di avere capitali distinti impiegati separatamente per le decadi e per i giorni. Si moltiplichino per 10 i capitali corrispondenti alle decadi, si avranno così solo capitali impiegati per giorni.

Si facciano i totali dei capitali impiegati per lo stesso numero di giorni e questi totali si moltiplicano per i giorni relativi. La somma dei prodotti dà il Numero complessivo cercato.

Per rendere più breve il calcolo si fa in modo che il numero delle decadi non sia mai superiore a 9: se un capitale è impiegato per più di 99 giorni si scompone la durata del suo impiego in parti, due o più, minori di 99 e si considera per ciascuna di esse un capitale distinto uguale al dato.

Il calcolo si dispone in questo modo:

Si prende una scacchiera di 10 caselle per lato e si numerano i lati sinistro e superiore da 0 a 9. Per il lato superiore i numeri indicano giorni, per l'altro decadi. Si dispongono i capitali nelle caselle all'incrocio delle colonne corrispondenti ai giorni colla linea delle decadi d'impiego.

Si sommano i capitali delle linee e quelli delle colonne. I totali di quelli delle linee moltiplicati per 10, si aggiungono rispettivamente ai totali delle colonne che hanno lo stesso numero, e si moltiplica ogni somma per il numero della colonna relativa.

Il totale dei prodotti dà il *Numero cercato*.

Applicazione.

Si debba calcolare l'interesse sui seguenti capitali per il numero dei giorni segnati a fianco di ciascuno, al 6 % (Anno di 360 g.).

g.	L.	g.	L.	g.	L.
18	1885	46	470	72	375
19	4320	47	695	73	1970
25	735	48	635	74	1200
26	568	49	1050	76	4000
36	1042	50	1836	77	315
37	391	51	75	80	160
38	825	53	815	81	2643
39	685	59	2640	82	1816
42	910	62	910	85	280
43	2630	63	1163	89	876
44	1627	64	326	92	1575

DECADI \ GIORNI	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9				
0									1 885	4 320	6 205	9 571		
1						735	568				1 303	3 345	9 571	
2							1 042	391	825	685	2 943	1 401	3 345	9 571
3					2 630	815	1 163	1 970			6 578	6 080	1 401	3 345
4			910	2 630	1 627		326	1 200			3 153	1 015	6 080	1 401
5	1 836	75		815							2 718	5 586	13 030	29 430
6			910	1 163	326			4 000			6 080	23 990	53 660	80 170
7			375	1 970	1 200			315			3 153	1 015	6 080	1 401
8	160	2 643	1 816			280					4 899	5 586	13 030	29 430
9			1 575							876	2 451	2 718	62 050	64 768 1
	1 996	2 718	5 586	6 578	3 153	1 015	6 080	1 401	3 345	9 571	40 843	62 050	64 768 1	64 768
	19 960	62 050	64 768 1	64 768	64 768	64 768	64 768	64 768	64 768	64 768	648 680	648 680	648 680	648 680
	21 956	64 768 1	70 354 2	71 346 3	67 921 4	65 783 5	70 848 6	66 169 7	68 113 8	74 339 9	689 523	710 730	712 448	713 448
	21 956	64 768	37 232	108 024	333 292	273 375	180 420	560 007	488 760	227 889	2273 767			

2 273 767 : 6000 = 378,961

13. *Procedimento di Cauchy.* — Serve per trovare l'interesse complessivo di più capitali per *tempi espressi in giorni*.

Basta ricordare: che l'interesse di un capitale è uguale alla somma dei suoi interessi per le parti in cui si voglia dividere il tempo d'impiego; che l'interesse complessivo di più capitali per lo stesso tempo è uguale all'interesse per lo stesso tempo sulla somma dei capitali; ed infine che se d (*intero*) è la millesima parte del divisore fisso, l'interesse per d giorni è la millesima parte del capitale.

I capitali dati siano ordinati per scadenze.

Quelli il cui tempo è uguale o superiore a d giorni, danno, per *questo tempo comune*, un interesse pari ad 1 millesimo del loro totale, quelli che scadono altri d e più giorni dopo danno, *per questo altro tempo comune* un interesse pari ad 1 millesimo del loro totale, e così via. Sommando e dividendo per 1000 i totali dei successivi gruppi di capitali così determinati si avrà l'interesse di tutti i capitali per i tempi multipli di d. Ma tra l'una e l'altra di queste scadenze ve ne sono altre $d-1$ e si dovranno calcolare sui capitali relativi altri interessi per 1, 2, 3, ... $d-1$, giorni residui. Si sommano tali capitali in $d-1$ totali secondo i giorni residui e si moltiplica ognuno di questi per i rispettivi giorni. Il totale dei prodotti dà il *Numero* complessivo. Una opportuna disposizione tabellare facilita i calcoli.

Le colonne sono d, le linee quante occorrono per comprendere tutti i capitali. Conviene calcolare i gruppi cominciando da quello che contiene i capitali di maggiore scadenza. In questo modo ogni gruppo si ottiene aggiungendo al totale della linea corrispondente la somma del gruppo precedentemente calcolato. Tale è la ragione della disposizione adottata negli esempi seguenti.

$6\ \%\ (D = 6000)$

	0	1	2	3	4	5		
90			1 575				1 575	1 575
84		280				876	1 156	→ 2 731
78			160	2 643	1 816		4 619	7 350
72	375	1 970	1 200		4 000	315	7 860	15 210
66								15 210
60			910	1 163	326		2 399	17 609
54						2 640	2 640	20 249
48	635	1 050	1 836	75		815	4 411	24 660
42	910	2 630	1 627		470	695	6 332	30 992
36	1 042	391	825	685			2 943	33 935
30								33 935
24		735	568				1 303	35 238
18	1 885	4 320					6 205	41 443
12								41 443
6								41 443
0								
		11 376 1	8 701 2	4 566 3	6 612 4	5 341 5		363 023
		11 376	17 402	13 698	26 448	26 705	$\frac{363\,023}{1000} = 363{,}023$	
							$\frac{95\,629}{6000} = 15{,}938$	
							L. 378,961	

TASSO SUPPOSTO 4,5 % ($D = 8000$)

	0	1	2	3	4	5	6	7		
88		876			1 575				2 451	2 451
80	160	2 643	1 816			280			4 899	7 350
72	375	1 970	1 200		4 000	315			7 860	15 210
64	326								326	15 536
56				2 640			910	1 163	4 713	20 249
48	635	1 050	1 836	75		815			4 411	24 660
40			910	2 630	1 627		470	695	6 332	30 992
32					1 042	391	825	685	2 943	33 935
24		735	568						1 303	35 238
16			1 885	4 320					6 205	41 443
8										41 443
0										
	7 274 1	8 215 2	9 665 3	8 244 4	1 801 5	2 205 6	2 543 7			268 507
	7 274	16 430	28 995	32 976	9 005	13 230	17 801		$\frac{268\,507}{1000} =$	268,507
									$\frac{125\,711}{8000} =$	15,714
									al 4,5 % L.	284,221
									+ 1,5 % (1/3)	94,74
									al 6 % L.	378,961

TASSO SUPPOSTO 4 % ($D = 9000$)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
90			1 575							1 575	1 575
81	2 643	1 816			280				876	5 615	7 190
72	375	1 970	1 200		4 000	315			160	8 020	15 210
63		326								1 489	16 699
54						2 640			910	3 550	20 249
45		470	695	635	1 050	1 836	75		815	5 576	25 825
36	1 042	391	825	685			910	2 630	1 627	8 110	33 935
27											33 935
18	1 885	4 320						735	568	7 508	41 443
9											41 443
0											
	9 293 1	4 295 2	1 320 3	5 330 4	4 791 5	985 6	3 365 7	4 956 8			237 504
	9 293	8 590	3 960	21 320	23 955	5 910	23 555	39 648		$\frac{237\,504}{1000} =$	237,504
										$\frac{136\,231}{9000} =$	15,137
										al 4 % L.	242,651
										+ 2 % (1/2)	126,32
										al 6 % L.	378,961

TAVOLA DEI DIVISORI FISSI PER L'ANNO COMMERCIALE UTILI PER ABBREVIARE I CALCOLI.

%	D.	%	D.
1,—	36000	3,60	10000
1 1/8	32000	3 3/4	9600
1,20	30000	4.—	9000
1,25	28800	4.50	8000
1.50	24000	4,80	7500
1.60	22500	5.—	7200
1.80	20000	5 1/4	6800
1 7/8	19200	5 5/8	6400
2,—	18000	6,.—	6000
2,25	16000	6 2/3	5400
2,40	15000	7.20	5000
2,50	14400	7.50	4800
2 2/3	13500	8,—	4500
3.—	12000	9.—	4000
3 1/8	10800	10,—	3600

14. *Adeguati di tempo e cambiamento di scadenze.* — Quando una persona ha verso un'altra debiti e crediti aventi scadenze determinate, e, fino ad esse, infruttiferi, può stipulare coll'altra parte di fare o ricevere un solo pagamento, invece di riscuotere e pagare le singole somme alle rispettive scadenze. Le condizioni del patto possono essere due:

1°. Si stabilisce che la somma da pagare sia uguale al *saldo* dei debiti e crediti, ed allora bisogna trovarne la *scadenza* (*media*).

2°. Si fissa la *scadenza comune* dell'unico pagamento e bisogna determinarne l'*importo*.

Siano $c_1 \ldots c_n$ gli importi, espressi in una stessa moneta, dei pagamenti, essi saranno considerati di segno contrario a seconda che rispetto ad una delle parti saranno debiti o crediti; (il segno si renderà esplicito nelle pratiche applicazioni, ora non è necessario, basta osservare che il valore attuale è dello stesso segno del capitale a cui è relativo). Base dell'accordo può essere questa: il saldo si paghi da chi ne risulta debitore ad una scadenza tale che il suo valore attuale uguagli la somma algebrica dei valori attuali dei debiti e crediti singoli, riferiti tutti ad uno stesso momento, in base ad uno stesso tasso. (Si dimostrerà più avanti che tale accordo è equo).

Siano $t_1 \ldots . t_n$ i tempi che passano tra questo momento comune (Epoca) anteriore alle scadenze, e le scadenze dei singoli pagamenti, T il tempo tra la stessa Epoca e la scadenza media, r il tasso. Si deve avere:

$$c_1(1-rt_1)+\ldots+c_n(1-rt_n)=(c_1+\ldots+c_n)(1-rT)$$

e svolgendo le parentesi

$$c_1+\ldots+c_n-c_1rt_1-\ldots-c_nrt_n=c_1+\ldots+c_n-(c_1+\ldots+c_n)rT$$

semplificando e cambiando di segno:

$$c_1t_1+\ldots+c_nt_n=(c_1+\ldots+c_n)T$$

$$T=\frac{c_1t_1+\ldots+c_nt_n}{c_1+\ldots+c_n}$$

La scadenza media è dunque indipendente dal tasso. Essa è anche indipendente dall'Epoca.

Sia infatti una nuova epoca che preceda l'altra del tempo t: La scadenza media ne disterà del tempo

$$T'=\frac{c_1(t_1+t)+\ldots c_n(t_n+t)}{c_1+\ldots c_n}$$

$$T'=\frac{c_1t_1+\ldots c_nt_n}{c_1+\ldots c_n}+\frac{c_1t+\ldots c_nt}{c_1+\ldots c_n}$$

$$T'=T+t$$

Quindi le due scadenze medie, contando i tempi dalle rispettive epoche, coincidono.

Se i tempi $t_1 \ldots t_n$ sono espressi in giorni si può dire brevemente: la scadenza media si ottiene dividendo la somma algebrica dei numeri (a partire da una certa epoca) per la somma algebrica dei capitali.

Se i *capitali sono tutti dello stesso segno* si dimostra che la scadenza media è compresa fra la massima e la minima delle scadenze dei capitali.

Sia infatti t_M il maggiore e t_m il minore dei tempi relativi. Se si sostituisce t_M a tutti i t_c si trova

$$t_M=\frac{c_1t_M+\ldots c_nt_M}{c_1+\ldots c_n}>T$$

perchè tutti i termini del numeratore sono maggiori (eccetto uno che è

uguale) di quelli corrispondenti nella espressione che dà T. Se si sostituisce t_m

$$t_m = \frac{c_1 t_m + \dots c_n t_m}{c_1 + \dots c_n} < T$$

perchè questa volta i termini del numeratore sono, uno c. s. eccettuato, minori di quelli corrispondenti nella espressione che dà T.

Si supponga ora il problema inverso: dovendosi pagare una somma S ad una certa scadenza T si convenga di pagare gli acconti $c_1 \dots c_n$ alle scadenze $t_1 \dots t_n$ ed il residuo $S-(c_1+\dots+c_n)=c_R$ ad una scadenza t_R da determinare. Dalla formola che dà T si ha immediatamente

$$t_R = \frac{S\,T-(c_1 t_1+\dots+c_n t_n)}{c_R}$$

che sarà, in generale, $\neq T$. In particolare, essendo identicamente

$$t_R = \frac{c_R\,T+c_1(T-t_1)+\dots+c_n(T-t_n)}{c_R}$$

se saranno tutti i $t < T$ cioè gli acconti anteriori alla scadenza del debito, tutti i termini che seguono $c_R\,T$ nel numeratore saranno positivi, cioè sarà $t_R > T$. In questo caso la *proroga* $t_R - T$ per il pagamento del residuo c_R è il compenso per l'anticipazione degli acconti rispetto alla scadenza T del debito totale S.

Applicazioni.

a) *Crediti* (+)

Cap.	Scad.	Gior.	Num.
2715,20	15 Dic.	7	189
3825,75	20 Genn.	43	1634
918,10	17 Febbr.	71	639
7459,05			2462

Debiti (−)

Cap.	Scad.	Gior.	Num.
1295,45	8 Dic.	*Epoca*	
2917,25	25 Genn.	48	1392
1200,—	15 Febbr.	69	828
5412,70			2220
(+) **2046,35**	*Saldi*	(+)	**242**
7459,05			2462

$\frac{(+)\ 242}{(+)\ 20} = (+)\ 12$ g. dall' 8 Dic.; scad. media: 20 Dic.

b)

1275,20	25 Genn.	*Epoca*		3218,25	15 Febbr.	21	672
4815,—	9 Febbr.	15	720	2763,70	10 Marzo	44	1232
1125,80	3 Marzo	37	407	5981,95			1904
7216,—			1127				
	Saldo	(−)	**777**	(+) **1234,05**	Saldo		
			1904	7216,—			

$\frac{(-)\ 777}{(+)\ 12} = -65$ giorni (con eccesso) dal 25 Genn., *scad. media*: 21 Nov.

c) *Compenso di anticipazione.*

Acconti				Deb. iniz.			
2715,—	30 Nov.	*Epoca*		9540	20 Genn.	81	7695
820,—	15 Dic.	15	120				
1195,—	10 Genn.	41	492				
4730,—			612				
(−) **4810,—**	*saldi*	(−)	**7083**				
9540,—			7695				

$\frac{(-)\ 7083}{(-)\ 48} = (+)\ 147$ giorni dal 30 Nov.; *scad. del residuo*: 19 Aprile

Osservazione. Si può dimostrare perchè il saldo pagato alla scadenza media T, determinata come si è fatto non debba comprendere interessi.

Nella formola che dà T indichiamo con un apice i capitali di segno negativo (per es. i debiti) ed i tempi relativi

$$T = \frac{C_1 t_1 + C_2 t_2 - C_1' t_1' - C_2' t_2}{c_1 + c_2 - c_1' - c_2'}$$

dalla quale si ha

$$TC_1 + TC_2 - TC_1' - TC_2' = C_1 t_1 + C_2 t_2 - C_1' t_1' - C_2' t_2'$$

e supposto

$$\left.\begin{matrix} t_1 \\ t_2' \end{matrix}\right\} > T > \left\{\begin{matrix} t_2 \\ t_1' \end{matrix}\right.$$

$$C_2(T-t_2) + C_2'(t_2'-T) = C_1(t_1-T) + C_1'(T-t_1')$$

Interessi perduti sui { crediti prorogati ; debiti anticipati } = { Interessi guadagnati sui (1) { crediti anticipati ; debiti prorogati }

(1) T nella pratica deve essere *intero;* se tale non è il risultato dato dalla formula, si arrotonda, ma allora il compenso tra gli interessi perduti e quelli guadagnati è incompleto.

Pertanto la convenzione fatta per il calcolo della scadenza media è equa.

15. — Gruppi di capitali con *uguale saldo* possono essere considerati *equivalenti*, se per *un'epoca qualunque:*

le rispettive somme algebriche dei valori attuali sono uguali oppure, identicamente, se hanno la stessa scadenza media.

Gruppi di capitali con *differenti saldi* possono essere considerate *equivalenti;*

rispetto un'epoca determinata, se le rispettive somme algebriche dei valori attuali, riferiti a quell'epoca, sono uguali;

Rispetto ad un'epoca qualunque (e non identicamente), se, due a due considerati, la differenza dei saldi è uguale all'interesse sul minore o (ciò che non è lo stesso), allo sconto del maggiore per la differenza tra le rispettive scadenze medie.

(Si tralasciano per brevità le dimostrazioni).

Scadenza comune, v. Capitolo omonimo.

CAPITOLO TERZO.

INTERESSE COMPOSTO

16. — Si dice che un capitale C_0 è impiegato ad interesse composto quando i suoi *incrementi relativi* per tempi uguali sono uguali; cioè, colle solite notazioni, quando:

$$\frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \ldots = \frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}} = r$$

Facendo il componendo

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{C_2}{C_1} = \ldots = \frac{C_n}{C_{n-1}} = 1 + r$$

Il rapporto tra un C qualunque ed il precedente è costante; dunque $C_0\, C_1\, C_2 \ldots . C_n$ costituiscono una progressione geometrica di ragione $1 + r$. Avremo quindi

$$1) \quad C_n = C_0 (1 + r)^n$$

L'espressione $1 + r$ si chiama *binomio* o *piede d'interesse.* (Si osservi che n nell'interesse semplice moltiplica il tasso e nel composto è l'esponente del binomio d'interesse).

Si deve qui come nell'interesse semplice notare la relazione tra r ed n.

Essendo

$$C_k = C_0 (1 + r)^k \quad \text{e} \quad C_{k-1} = C_0 (1 + r^{k-1}$$

si ha

$$C_k = C_{k-1} (1 + r) = C_{k-1} + C_{k-1}\, r$$

Si dice perciò che l'*interesse di un periodo*, se è composto, *si aggiunge al capitale che lo ha prodotto per formare il capitale fruttante nel periodo successivo* (*capitalizzazione degli interessi periodici*).

Se nella formula 1) cambiamo segno ad n si ha la formula dello sconto

$$2) \quad C_{-n} = C_0 (1 + r)^{-n}$$

In questa si verifica che il montante della somma scontata è uguale al valor nominale [1]

$$C_{-n} (1 + r)^n = C_0 (1 + r)^{-n} (1 + r)^n = C_0$$

17. — La divisione della durata dell'impiego è arbitraria: si poteva farla in un numero $n_1 \neq n$. È evidente che il tasso r_1 sarebbe risultato diverso da r. Determiniamo r_1 in modo che risulti *equivalente* ad r. Deve essere

$$C_0 (1 + r)^n = C_0 (1 + r_1)^{n_1}$$

$$(1 + r)^n = (1 + r_1)^{n_1}$$

$$n \log (1 + r) = n_1 \log (1 + r_1)$$

$$\log (1 + r) : \log (1 + r_1) = n_1 : n$$

$$3) \quad \log (1 + r) : \log (1 + r_1) = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1}$$

Ora n ed n_1 misurano con unità diverse lo stesso tempo — la durata dell'impiego — quindi $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n_1}$ sono proporzionali alla grandezza delle unità di tempo adottate. La 3) dice che i *logaritmi dei binomi d'interesse, se i tassi sono equivalenti, sono proporzionali ai periodi di tasso.*

Dalle formule precedenti si ricava

$$(1 + r)^{\frac{n}{n_1}} = 1 + r_1$$

[1] Quindi lo sconto composto corrisponde in questo caso allo sconto semplice *razionale*.

e quindi

$$(1 + r)^{\frac{1}{n_1}} - 1 = r_1$$

formula che dà il tasso equivalente ad un altro di differente periodo e dove l'esponente del binomio d'interesse è il rapporto fra il periodo del tasso cercato e quello del tasso dato.

In particolare se il periodo del tasso cercato è $\frac{1}{m}$ di quello dato

$$r_m = (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1$$

18. — Dalla relazione $(1 + r)^{\frac{1}{m}} = 1 + r_m$ si ha

$$C_0 (1 + r)^{\frac{k}{m}} = C_0 (1 + r_m)^k.$$

Il secondo membro indica il montante del capitale C_0 in k periodi m^{mi} di quello del tasso r, e l'uguaglianza dice che questo montante si può ottenere col tasso r *esprimendo la durata dell'impiego in periodi di tasso*, con un numero, nel caso presente, frazionario $\frac{k}{m}$.

Nella pratica il tasso è dato per un certo periodo, per es. l'anno, e la durata dell'impiego non è sempre un multiplo esatto di questo periodo. Sia n il numero intero dei periodi d'impiego e $\frac{k}{m}$ la parte frazionaria. Il montante di C_0 dopo il tempo dato sarà

$$C_{n+\frac{k}{m}} = C_0 (1 + r)^n (1 + r_m)^k$$

ma

$$(1 + r_m)^k = (1 + r)^{\frac{k}{m}}$$

quindi

$$C_{n+\frac{k}{m}} = C_0 (1+r)^n (1+r)^{\frac{k}{m}}$$

$$4) \quad C_{n+\frac{k}{m}} = C_0 (1+r)^{n+\frac{k}{m}}$$

19. — Si può dimostrare che nell'interesse composto, dati due tassi equivalenti, quello per periodo minore è minore del tasso proporzionale corrispondente, cioè che essendo $m > 1$, è $r_m < \frac{r}{m}$.

Si sviluppi la potenza $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = 1 + m\frac{r}{m} + \left[\ldots + \left(\frac{r}{m}\right)^m\right]$$

$$= 1 + r + \left[\ldots - + \left(\frac{r}{m}\right)^m\right]$$

Nella parentesi quadra figurano solo quantità positive, dunque, sopprimendole, possiamo scrivere

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m > 1 + r$$

Ma si è visto che

$$1 + r = (1 + r_m)^m$$

quindi

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m > (1 + r_m)^m$$

da cui

$$\frac{r}{m} > r_m \qquad \text{c. d. d.}$$

Esempio. Se il tasso annuo è del 6 % e si cerca il tasso quadrimestrale, si ha $m = 3$ e

$$r_3 = 1{,}06^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}0196214 < 2\ \%.$$

Si ha ancora $r > m\, r_m$ cioè: dati due tassi equivalenti, quello con periodo maggiore supera il tasso proporzionale corrispondente dell'altro.

Esempio. Se il tasso annuo è del 6 % e si cerca il tasso quinquennale, si ha $m = \frac{1}{5}$ e

$$r_{1/5} = 1{,}06^5 - 1 = 0{,}338226 > 30\ \%.$$

20. — *Si può dimostrare* che per $\frac{k}{m} < 1$ l'interesse composto dà un montante minore dell'interesse semplice, cioè che

$$(1+r)^{\frac{k}{m}} < 1 + \frac{k}{m}\, r$$

Praticamente si trascura la differenza e, per la più grande rapidità del calcolo, per periodi minori dell'anno — o del semestre — si preferisce l'interesse semplice al composto. Si dice anche che la *capitalizzazione dei frutti* avviene solo alla fine dell'anno — o del semestre — mentre colla teoria ora svolta la capitalizzazione avverrebbe alla fine di ogni periodo per quanto arbitrariamente piccolo.

Se si deve calcolare il montante al tasso r di un capitale C_0 dopo n periodi di tasso più una frazione $\frac{k}{m}$ si fa

$$C_n = C_0 (1+r)^n$$

$$5) \quad C_{n+\frac{k}{m}} = C_n \left(1 + \frac{k}{m} r\right) = C_0 (1+r)^n \left(1 + \frac{k}{m} r\right).$$

Qui l'esponente del binomio d'interesse ha solo valori *interi*, mentre prima si consideravano anche valori frazionari.

In matematica « Chiamasi *intervallo* (m, n) l'insieme di « tutti i numeri reali positivi e negativi, compresi fra m ed n « (inclusi o no questi *estremi* m ed n). Si dice che i numeri « di un intervallo formano una successione *continua* (*non in-* « *terrotta*, senza lacuna), per distinguerla dalle successioni co- « stituite da soli numeri interi o da soli numeri frazionari o da

« soli numeri irrazionali o da loro combinazioni e compresi fra « m ed n, le quali successioni denominansi per opposizione « *discrete* » (1).

Possiamo perciò chiamare la prima specie d'interesse, nella quale l'esponente del binomio d'interesse può assumere qualunque valore reale tra $-\infty$ e $+\infty$, *continuo*, e l'ultima forma, dove il detto esponente assume solo valori interi, *discreto*.

21. — Cambiando segno al tempo nella formula dell'interesse continuo si ha

$$C_{-\left(n+\frac{k}{m}\right)} = C_0 (1+r)^{-\left(n+\frac{k}{m}\right)},$$

ed il montante del valore attuale è uguale alla somma da scontare.

Facendo altrettanto per l'interesse discreto si ha

$$C_{-\left(n+\frac{k}{m}\right)} = C_0 (1+r)^{-n} \left(1 - r\frac{k}{m}\right)$$

dove, come per l'interesse semplice,

$$C_{-\left(n+\frac{k}{m}\right)} (1+r)^n \left(1+\frac{k}{m} r\right) =$$

$$= C_0 (1+r)^{-n} \left(1 - r\frac{k}{m}\right)(1+r)^n \left(1+\frac{k}{m} r\right) =$$

$$= C_0 \left(1 - r^2 \frac{k^2}{m^2}\right) \ddagger C_0.$$

Si usa, o si propone, per conservare anche per il discreto la proprietà di cui gode l'interesse continuo, la formula

$$C_{-\left(n+\frac{k}{m}\right)} = C_0 (1+r)^{-n} \left(1 + r\frac{k}{m}\right)^{-1}.$$

Abbiamo così visto 3 specie d'interesse: il semplice, il composto continuo ed il composto discreto.

Si è già detto che per $\frac{k}{m} < 1$ è $1 + \frac{k}{m} r > (1+r)^{\frac{k}{m}}$ e si è visto che per n intero e > 1 è $1 + rn < (1+r)^n$. Ne risulta

$$C_0 (1+nr) < C_0 (1+r)^n$$

cioè che il montante ad interesse semplice è minore di quello ad interesse composto, e che $C_0 (1+r)^n (1+r)^{\frac{k}{m}} < C_0 (1+r)^n \left(1+\frac{k}{m} r\right)$

(1) S. Ortu Carboni, *I complementi dell'algebra elementare*. 24 pag. 30.

cioè che il montante all'interesse composto continuo è minore di quello ad interesse composto descritto (quando esiste differenza tra di loro).

22. — Le formule dell'interesse composto sono lunghe a calcolarsi senza il sussidio dei logaritmi ed alcuni problemi inversi sono senza l'uso di essi insolubili.

Dalle formule

$$C_n = C_0 (1+r)^n \text{ si ha } \log C_n = \log C_0 + n \log (1+r)$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+r)^n} = C_n (1+r)^{-n}, \quad \log C_0 = \log C_n - n \log (1+r)$$

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+r)^n, \quad \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = r$$

che direttamente non è conveniente calcolare.

Coi logaritmi

$$\log C_n - \log C_0 = n \log (1+r)$$

$$\log (1+r) = \frac{\log C_n - \log C_0}{n}$$

ed

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log (1+r)} \quad (1)$$

Queste formule valgono per n qualunque nell'interesse composto continuo, e nel discreto solo quando il tempo d'impiego è realmente intero.

23. — Nell'interesse C. D. il problema della determinazione di r è di grado $n+1$, quindi non risolubile algebricamente in generale.

Si ha però una risoluzione numerica sollecita e di rapida approssimazione. Si può dare la dimostrazione, omessa per brevità, che se nella formula dell'I. C. D. si dà ad r nel fattore

(1) Se $C_n = k\, C_0$ si ha

$$n = \frac{(\log k + \log C_0) - \log C_0}{\log (1+r)} = \frac{\log k}{\log (1+r)}.$$

di 1° grado un valore approssimato e si risolve rispetto al binomio di interesse, *l'errore del risultato è minore di quello del tasso supposto. I due errori sono di segno opposto.* Questo si vede facilmente. Scritta la formula nel seguente modo

$$(1 + r_2)^n \left(1 + \frac{k}{m} r_1\right) = \frac{C_n}{C_0}$$

si osservi che il prodotto dei 2 fattori del primo membro è uguale ad una quantità nota fissa. Se nel fattore di primo grado diamo ad r_1 un valore maggiore (minore) di quello incognito che verifica l'uguaglianza, perchè questa sia ancora verificata il primo fattore deve assumere un valore minore (maggiore) del vero, e, siccome è fisso l'esponente n, lo stesso deve avvenire per il valore r_2 di r che se ne trae.

Concludendo: Il valore dell'incognita è *compreso* tra il tasso supposto e quello ottenuto e più vicino a quest'ultimo. Il primo valore da sostituire può essere quello ottenuto risolvendo il problema nell'ipotesi dell'I. C. C., il quale valore è maggiore del vero.

Esempio. Dato $C_0 = 4321$, $C_n = 7893{,}12$, $n = 10$ *anni* 4 *mesi*, e *l' Int. C. D., determinare il tasso annuo.*

Supposto l'I. C. C. si ha per r

$$\log (1 + r) = \frac{\log 7893{,}12 - \log 4321}{10 + 4/12} = 0{,}02532221 = \log 1{,}0604$$

$$r = 0{,}0604.$$

Sostituiamo questo valore nella formula dell'I. C. D. e risolviamo rispetto al binomio d'interesse

$$(1 + r)^n = \frac{7893{,}12}{4321\,(1 + \frac{4}{12}\,0{,}0604)}$$

$$\log (1 + r) = \frac{\log 7893{,}12 - (\log 4321 + \log 1{,}02013)}{10} = 0{,}0253002$$

da cui $r = 0{,}0599854$.

Il valore vero di r è compreso tra 6,04 % e 5,9985 % e più vicino a quest'ultimo. È infatti il 6 %.

24. — Per determinare il tempo si osservi che si dispone di una sola equazione

$$5) \quad C_{n+\frac{k}{m}} = C_0 (1 + r)^n (1 + \frac{k}{m} r)$$

e le incognite sono n e $\frac{k}{m}$.

Tuttavia, dovendo essere

$$n \geqq 0 \text{ ed intero}$$

$$0 \geqq \frac{k}{m} < 1$$

il problema non è indeterminato e si potrebbe facilmente dimostrare che ammette una sola soluzione.

Dalla formula precedente si ha

$$\log C_{n+\frac{k}{m}} = \log C_0 + n \log (1 + r) + \log (1 + \frac{k}{m} r)$$

$$n = \frac{\log C_{n+\frac{k}{m}} - \log C_0}{\log (1 + r)} - \frac{\log (1 + \frac{k}{m} r)}{\log (1 + r)}$$

Sia Q la parte intera del quoziente ed R il resto della divisione $(\log C_{n+\frac{k}{m}} - \log C_0) : \log (1 + r)$, sostituendo nella precedente avremo

$$n = Q + \frac{R}{\log (1 + r)} - \frac{\log (1 + \frac{k}{m} r)}{\log (1 + r)}$$

$$n - Q = \frac{R}{\log (1 + r)} - \frac{\log (1 + \frac{k}{m} r)}{\log (1 + r)}$$

Ora, essendo $1 + \frac{k}{m} r < 1 + r$ e quindi

$$\log (1 + \frac{k}{m} r) < \log (1 + r)$$

il secondo membro rappresenta la differenza fra due frazioni proprie e non può essere che frazione propria o nullo, mentre il primo membro è la differenza fra due interi e non può essere che intero o nullo.

Saranno quindi entrambi nulli ed

$$n = Q \quad \text{ed} \quad \frac{R}{\log(1+r)} = \frac{\log\left(1+\frac{k}{m}r\right)}{\log(1+r)}$$

cioè: $R = \log\left(1+\frac{k}{m}r\right)$.

Da cui si ha facilmente $\frac{k}{m}$.

25. — Da $I = C_n - C_0$, essendo $C_n = C_0(1+r)^n$ e $C_0 = C_n(1+r)^{-n}$ si ha $I = C_0(1+r)^n - C_0 = C_0[(1+r)^n - 1]$ da cui $C_0 = \frac{I}{(1+r)^n - 1}$

(Formula che risolve anche il problema: trovare il capitale che impiegato al tasso r permette di riscuotere ogni n periodi di tasso il frutto complessivo costante I).

$I = C_n - C_n(1+r)^{-n} = C_n[1-(1+r)^{-n}]$ da cui C_n.

Le precedenti formule valgono per n qualunque nell'int. comp. *continuo*, e per n intero nel *discreto*. Se nel caso del *discreto* c'è una frazione di tempo, il binomio d'interesse va in tutte le formule moltiplicato per

$$\left(1+\frac{k}{m}r\right).$$

26. *Osservazioni sul tasso.* — Nella pratica degli affari il periodo di tasso è in generale l'anno, e così si deve intendere ogni volta che il tasso è enunciato senza indicazione di periodo. Tuttavia i frutti periodici dei capitali vengono a scadenza a periodi minori (semestri o trimestri) e sono calcolati *non in base al tasso equivalente* ma *in base al tasso proporzionale*.

Così il tasso annuale enunciato è puramente *nominale* ed il *tasso effettivo*, supposti k pagamenti in un anno, è dato dalla nota relazione:

$$1+x = \left(1+\frac{r}{k}\right)^k$$

Un simile tasso r, pagabile in k rate durante un periodo, *proporzionalmente al tempo* (cioè in base al tasso $\frac{r}{k}$ per periodo k^{mo}) si dice: tasso *convertibile k volte per periodo*.

Sono, per es., convertibili due volte all'anno i tassi pagati su quasi tutti i debiti contratti dalle aziende pubbliche e private: piuttosto rari sono gli esempi di tassi convertibili un numero maggiore di volte.

Non è il caso di trovare nuove formule considerando il tasso convertibile: basta considerare senz'altro il tasso proporzionale $\left(\frac{r}{k}\right)$ e come *periodo di tasso* corrispondente la k^{ma} parte di quello del tasso nominale.

27. *Adequati di tempo.* — Riprendendo le notazioni e definizioni stabilite per i calcoli coll'interesse semplice abbiamo che la *Scadenza Media* dovrà soddisfare a questa relazione

$$(C_1+\ldots+C_n)(1+r)^{-T} = C_1(1+r)^{-t_1}+\ldots+C_n(1+r)^{-t_n}$$

da cui

$$(1+r)^T = \frac{C_1+\ldots+C_n}{C_1(1+r)^{-t_1}+\ldots+C_n(1+r)^{-t_n}}$$

e, coi log, T.

Si vede che T *dipende dal tasso* r.

La scadenza media è indipendente dall'Epoca. Infatti fissando una Epoca che preceda l'altra del tempo t, si ha

$$(1+r)^{T'} = \frac{C_1+\ldots+C_n}{C_1(1+r)^{-t_1-t}+\ldots+C_n(1+r)^{-t_n-t}}$$

$$(1+r)^{T'} = \frac{C_1+\ldots+C_n}{C_1(1+r)^{-t_1}+\ldots+C_n(1+r)^{-t_n}}(1+r)^t = (1+r)^{T+t}$$

$$T' = T+t \quad \text{c. d. d.}$$

Se tutti i C sono dello stesso segno, T è compreso tra il minore t_m ed il maggiore t_M dei tempi relativi. Infatti

$$(1+r)^{t_m} = \frac{C_1 + \ldots + C_n}{C_1(1+r)^{-t_m} + \ldots + C_n(1+r)^{-t_m}} <$$

$$< \frac{C_1 + \ldots + C_n}{C_1(1+r)^{-t_1} + \ldots + C_n(1+r)^{-t_n}} = (1+r)^T$$

$$(1+r)^{t_M} = \frac{C_1 + \ldots + C_n}{C_1(1+r)^{-t_M} + \ldots + C_n(1+r)^{-t_M}} >$$

$$> \frac{C_1 + \ldots + C_n}{C_1(1+r)^{-t_1} + \ldots + C_n(1+r)^{-t_n}} = (1+r)^T$$

Sia ora il problema: Invece di pagare una somma S fra un tempo T si danno degli acconti $C_1 \ldots C_n$ dopo i tempi $t_1 \ldots t_n$ ed il residuo $S - C_1 - \ldots - C_n = C_k$ fra un tempo t_k da determinare. Si ha subito:

$$(1+r)^{t_k} = \frac{C_k}{S(1+r)^{-T} - [C_1(1+r)^{-t_1} - \ldots - C_n(1+r)^{-t_n}]}$$

Se i tempi $t_1 \ldots t_n$ sono minori di T, sarà $t_k > T$ e la proroga $t_k - T$ per il pagamento del residuo è il *Compenso per le anticipazioni* fatte.

Gruppi di capitali di uguali o differenti saldi sono considerati equivalenti, se, ***riferiti ad un'epoca qualunque***, in base ad un *tasso d'interesse convenuto*, danno uguali risultati.

Per la *Scadenza Comune*, v. cap. omonimo.

28. ***Regola di falsa posizione.*** — Sia una equazione di grado qualunque ad un' incognita. Valori qualunque, che non siano soluzioni, attribuiti alla incognita non annullano l'equazione ma le fanno prendere valori determinati $\neq 0$ *(errori)*.

Si prendano due valori attribuiti all'incognita *(posizioni)* ed i relativi *errori*.

Si moltiplichi ciascuna posizione per l'errore dell'altra, si faccia la differenza dei prodotti e si divida per la differenza degli errori.

Il quoziente rappresenterà: nelle equazioni di 1° grado il valore esatto, in quelle di grado superiore un valore approssimato dell'incognita.

Nelle applicazioni si deve tener conto del segno relativo degli errori.

$$x = \frac{x_1 e_2 - x_2 e_1}{e_2 - e_1}$$

se si vuol determinare solo la differenza fra una delle *posizioni* fatte per

esempio x_1 e l'incognita, si ha:

$$d = x - x_1 = \frac{x_1 e_2 - x_2 e_1}{e_2 - e_1} - x_1 = \frac{e_1(x_1 - x_2)}{e_2 - e_1}$$

e, se, come avviene spesso coll'uso di tavole prontuarie $x_1 - x_2 = 1$

$$d = \frac{e_1}{e_2 - e_1}.$$

Applicazione. Si supponga $C_0 = 3850$, $n = 20$, $C_{20} = 9833{,}07$ e l'interesse composto.

Le tavole danno i valori di C_n per $C_0 = 1$, perciò si calcola $C_{20} : C_0 = 2{,}554028$.

Per lo stesso tempo sulle tavole si trova $1{,}05^{20} = 2{,}653298$ e $1{,}045^{20} = 2{,}411714$. Si fa allora:

x_1	5 %	2,653298			
x		2,554028	diff. e_1 (+) 0,099270	$e_1 x_2$ = (+) 0,446715	
x_2	4,5 %	2,411714	diff. e_2 (−) 0,142314	$e_2 x_1$ = (−) 0,751560	
			(−) 0,241584	(−) 1,158285	

$$x = \frac{(-)\ 1{,}158285}{(-)\ 0{,}241584} = 4{,}795\ \%.$$

Il tasso vero è 4,8 %.

Volendo trovare la differenza ta x_1 5 % ed il tasso vero:

$$\frac{e_1(x_1 - x_2)}{e_2 - e_1} = \frac{+\ 0{,}099270 \cdot 0{,}5}{(-)\ 0{,}291584} = (-)\ 0{,}025.$$

Da cui $x = 5 - 0{,}205 = 4{,}795$ c. s.

CAPITOLO QUARTO.

PERIODICITÀ

29. — Si dicono *Periodicità — annualità, rendite, valori periodici — dei valori che diventano o cessano di essere fruttiferi o disponibili in momenti — valute — equidistanti.* I loro importi — *rate* — possono essere tra loro uguali (periodicità *costante*) oppure differenti (p. *variabili*) con o senza leggi determinate; può la loro esistenza dipendere dal verificarsi di fatti determinati incerti, oppure essere considerati indipendenti da ogni presumibile avvenimento cioè *certi*; possono essere in numero *finito* od *illimitato.*

Chiameremo *periodo di rata* il tempo compreso tra due valute consecutive.

Il problema generale della periodicità è questo:

Trovare un valore unico che in un dato momento di valutazione — Epoca — sia equivalente ad una data periodicità, finita od infinita.

Se l'Epoca non è seguita dalla valuta di nessuna rata quel valore complessivo si dice *Montante*, se l'epoca non è preceduta da nessuna valuta esso si chiama *Valore attuale.* È evidente che se le rate sono in numero infinito non si può parlare di Montante ma solo di Valore Attuale.

Se l'Epoca coincide colla valuta dell'ultima rata si dice che si fa il Montante di un *periodicità posticipata*, se la segue dopo un periodo di rata, si ha il Montante di una *periodicità anticipata* (v. fig. 1 e 2).

Se l'Epoca precede di un periodo di rata la valuta della prima si dice che si fa il Valore Attuale di una periodicità *immediata*; se è più vicino a questa valuta e ne dista del tempo $1 - k$ ($k < 1$), si fa il Valore Attuale di una periodicità *anticipata di k*; se $k = 1$ cioè l'epoca coincide colla prima valuta la periodicità si dice *semplicemente anticipata* (v. fig. 3, 4 e 5).

La periodicità si dice *differita* o *protratta di h* se l'Epoca precede del tempo h il momento in cui sarebbe immediata (v. fig. 6).

30. — Indichiamo con a la rata, con r il tasso unitario di interesse, con n il numero [1] delle rate, con m il rapporto tra il periodo di tasso e quello di rata, con S il valore complessivo. Indicheremo inoltre con t il tempo — *espresso in periodi di tasso* — che passa tra l'*Epoca* e la valuta dell'ultima rata, convenendo che questo tempo sarà *positivo* se l'Epoca segue, *negativo* se l'Epoca precede l'ultima valuta (v. fig. 7).

Il valore complessivo, ad un certo momento, della periodicità è dato dalla somma dei valori delle singole rate riferite a quel momento. Osserviamo che il tempo d'impiego della prima rata riferito alla valuta dell'ultima sarebbe di $n - 1$ periodi di rata, ma siccome l'Epoca dista da questa valuta del tempo t, il tempo d'impiego della prima rata espresso in periodi di tasso è $\frac{n-1}{m} + t$. La seconda rata frutta per un periodo di rata in meno, e quindi in tutto per il tempo $\frac{n-2}{m} + t$, e così via. L'ultima rata frutta per il tempo t.

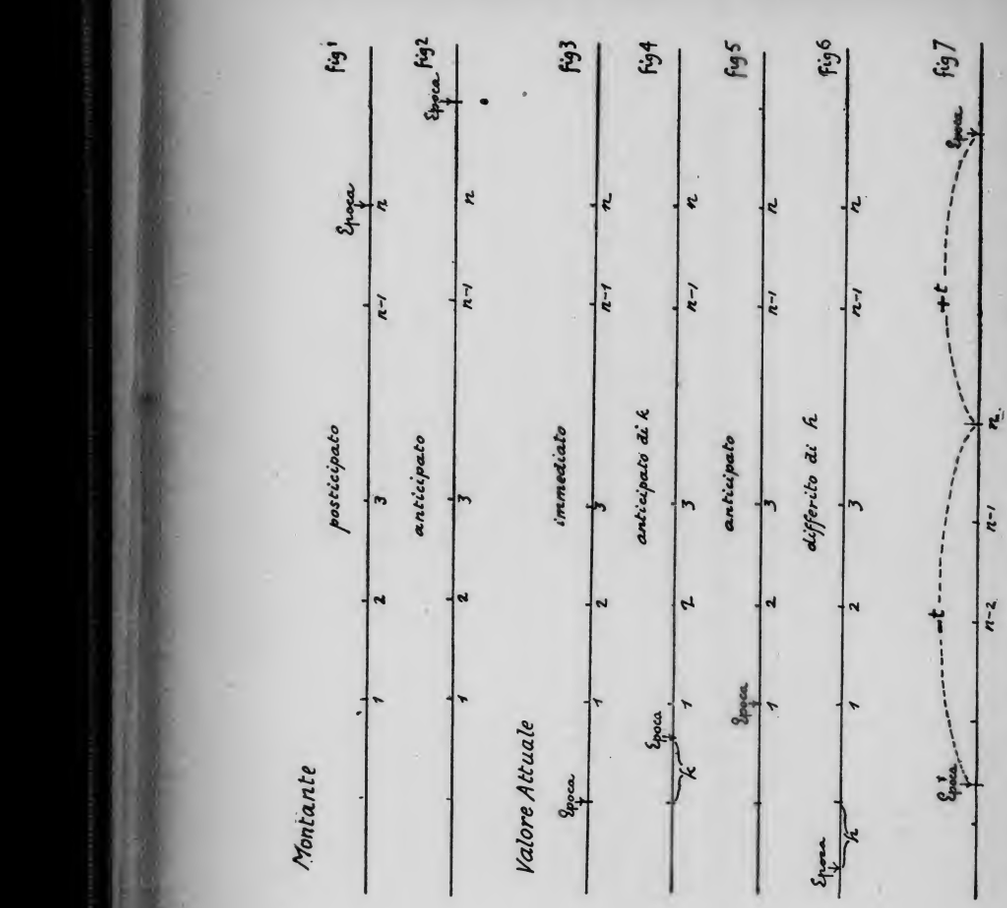
31. *Periodicità ad interesse semplice costanti* [2]. — Supponendo l'interesse semplice, ricordando i tempi di impiego già detti, si avranno, riferiti all'Epoca, i seguenti valori:
per la prima rata

$$a\left[1 + \left(\frac{n-1}{m} + t\right) r\right]$$

---

[1] Che per ora supporremo *finito.*

[2] Le p. ad interesse semplice *variabili* non hanno finora pratica applicazione.



per la seconda

$$a\,[1+(\frac{n-2}{m}+t)\,r]$$

. . . . . .

per la k^{ma}

$$a\,[1+(\frac{n-k}{m}+t)\,r]$$

. . . . . .

per la n^{ma}

$$a\,[1+t\,r]$$

Prima di sommare questi n valori, si osservi che essi formano una progressione aritmetica: infatti la differenza fra un termine qualunque k^{mo}, ed il precedente $(k-1)^{mo}$, è costante, non dipende da k.

$$a\,[1+(\frac{n-k}{m}+t)\,r]-a\,[1+(\frac{n-(k-1)}{m}+t)\,r]=$$

$$=a\,r\,[\frac{n-k}{m}+t-\frac{n-(k-1)}{m}-t]=-\frac{a\,r}{m}$$

Ora: la somma dei termini di una progressione aritmetica finita si ottiene moltiplicando per il numero dei termini la semisomma degli estremi; quindi

$$S=n\,\frac{1}{2}\left\{a\,[1+(\frac{n-1}{m}+t)\,r]+a\,[1+t\,r]\right\}=$$

$$=\frac{a\,n}{2}\,[2+(\frac{n-1}{m}+2\,t)\,r]$$

da cui

$$1)\quad S=a\,n\,[1+(\frac{n-1}{2\,m}+t)\,r]\ ^{(1)}$$

---

(1) Si può dire che S è uguale al montante del valore nominale delle rate per il tempo compreso tra il punto medio fra le estreme scadenze e

Nelle pratiche applicazioni di questa formula è in generale $m \neq 1$.

32. — Diamo a t alcuni particolari valori

a) $t = 0$ (Montante posticipato)

$$S = a\,n\,(1 + \frac{n-1}{m}\,r)$$

b) $t = \frac{1}{m}$ (Montante anticipato)

$$S = a\,n\,[1 + \left(\frac{n-1}{2\,m} + \frac{1}{m}\right) r] = a\,n\,(1 + \frac{n+1}{2\,m}\,r)$$

c) $t = -\frac{n-1}{m}$ (Valore attuale anticipato)

$$S = a\,n\,[1 + \left(\frac{n-1}{2\,m} - \frac{n-1}{m}\right) r] = a\,n\,[1 + \frac{n-1-2\,(n-1)}{2\,m}\,r] =$$

$$= a\,n\,(1 = \frac{n-1}{2\,m}\,r)$$

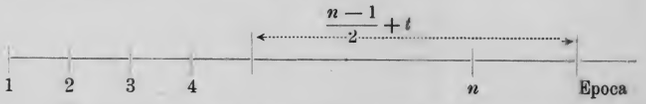
d) $t = -\frac{n}{m}$ (Valore attuale immediato)

$$S = a\,n\,[1 + \left(\frac{n-1}{2\,m}\right) - \frac{n}{m}\,r] = a\,n\,(1 + \frac{-n-1}{2\,m}\,r) =$$

$$= a\,n\,(1 - \frac{n+1}{2\,m}\,r)$$

---

l'epoca. Così in pratica si calcola l'interesse sul valore nominale delle rate per quel tempo, e si somma col valore nominale.



Esempio. Siano da valutare al 3 % semplice 10 versamenti mensili di L. 50, quattro mesi dopo la scadenza dell'ultimo. Tra il 1° ed il 10° versamento passano nove mesi, scadenza media mesi 4,5, perciò si calcola l'interesse per mesi $4 + 4{,}5 = 9{,}5$ sul valore nom. delle rate e gli si aggiunge

$$\frac{(50 \cdot 10)\ 9{,}5 \cdot 0{,}03}{12} + (50 \cdot 10) = 11{,}87 + 500 = 511{,}87.$$

Dalla 1) e dalle ultime sue forme si ottiene facilmente il valore di a conoscendo tutti gli altri elementi. E si risolve così il problema trovare la rata, i termini della quale sono equivalenti ad una somma S in un *dato* momento. Questa somma S può essere un debito da estinguere — periodicità di *ammortamento* — o da costituire — periodicità di *capitalizzazione* (in queste ultime è sempre $t \geqq o$).

33. *Osservazione.* — Il modo che si è seguito per ottenere la formula 1) è stato questo: le singole rate sono state portate dalla loro valuta all'*Epoca* cioè alla valuta di S. Ma — *supposto dato* S — si avrebbe potuto fissare un'altra Epoca comune e trasportare ad essa, sia S sia le rate; ottenendo, in generale, un risultato differente. In particolare si potrebbe portare S alla scadenza dell'ultima rata oppure portarla al momento in cui le rate risultano immediate. Nel fare questo trasporto di valute si potrebbe usare per S un tasso diverso da quello per le rate. Nella pratica questo caso è possibile. Si supponga che S rappresenti un debito fruttifero ad un tasso r e che il creditore non voglia accettare pagamenti rateali, ma pretenda il montante di S alla scadenza. Il debitore può allora depositare presso una banca le rate che vorrebbe pagare, e non lo può, al creditore; ed alla scadenza del debito ritira dalla banca e consegna al creditore i depositi fatti più l'interesse che quella gli ha concesso ad un tasso r_1, in generale diverso da r (questo modo di estinguere i debiti si dice anche *ammortamento americano*).

Nel caso più semplice che le rate risultino immediate rispetto alla scadenza del debito C possiamo:

1°. Prendere per Epoca la valuta del debito

$$c = a_1\,n\,(1 - \frac{n+1}{2\,m}\,r)$$

2°. Prendere per Epoca la valuta dell'ultima rata

$$c\,(1 + \frac{n}{m}\,r) = a_2\,n\,(1 + \frac{n-1}{2\,m}\,r) \quad (^1)$$

(¹) È facile dimostrare che è $a_1 > a_2$.
Non importa considerare il caso che le rate risultino anticipate ri-

È frequente la vendita di oggetti di prezzo piuttosto rilevante, verso pagamenti rateali per allettare i compratori. Spesso è indicato anche il prezzo per l'acquisto a pronta cassa ed allora può essere interessante calcolare, colle formule trovate, il tasso d'interesse preteso per queste rateazioni di pagamenti (1).

34. — Facilmente si ottengono le formule che danno r, m, t ed n (per quest'ultimo l'equazione è di 2° grado).

Osservazioni intorno ad n. Siccome n indica il numero delle rate esso è essenzialmente *intero*. Se risolvendo rispetto al numero delle rate si trova un risultato $n+k$ (n intero e $k<1$) questo vuol dire che i dati del problema vanno modificati. In particolare: una delle n rate va aumentata, oppure tutte le rate ugualmente aumentate, o si aggiunge — se possibile — una $(n+1)^{ma}$ rata di importo $<a$, od anche, lasciando invariate le rate ed il loro numero si modifica t.

Per determinare l'aumento da apportare alla rata k^{ma}, scelta ad arbitrio si uguaglia S alla somma di n rate uguali alla data più l'aumento della k^{ma}, prendendo per Epoca comune la valuta di S.

Per determinare la variazione uguale da apportare a tutte le n rate si risolve rispetto ad a il problema, prendendo il valore n intero trovato (oppure l'intero successivo $n+1$).

---

spetto alla scadenza del debito. Infatti la prima rata si può portare subito a diminuzione del capitale debito e non restano a considerare che le $n-1$ rate residuo. Si ha così:

$$\text{I)}\quad c-a_1=a_1(n-1)\left(1-\frac{n}{2m}r\right)$$

$$\text{II)}\quad (c-a_2)\left(1+\frac{n-1}{m}r\right)=a_2(n-1)\left(1+\frac{n-2}{2m}r\right).$$

(1) Per semplicità supporremo C già depurato da tutti i pagamenti pronti, ed n indicare le rate avvenire. Si ha nel caso primo

$$r_1=\frac{2m(an-C)}{an(n+1)}$$

e nel caso secondo

$$r_2=\frac{2m(an-C)}{n[2C-a(n-1)]}$$

da cui, confrontando i denominatori e osservando che $C<an$, si ha $r_2>r_1$.

Analogamente si procede volendo modificare t.

Se la variazione da apportare a t è maggiore di $\frac{1}{m}$ è possibile determinare una rata supplementare $(n+1)^{ma}$ nello stesso modo detto per mutare *una* rata.

35. — Nella pratica degli affari la *capitalizzazione dei frutti* avviene alla fine di periodi determinati, per es. semestri od anni, cosicchè per tempi maggiori l'interesse semplice e le formule che ne derivano non sono più applicabili. Le formule trovate si usano utilmente quando, per facilitare al debitore il pagamento di annualità di ammortamento, di premi di assicurazione, ecc., di solito calcolati per anno, si concede di rateallizzarli per semestri, bimestri o mesi.

Per es. nei mutui che Comuni, Provincie, Consorzi di bonifica e per opere idrauliche contraggono colla Cassa Depositi e Prestiti le annualità d'ammortamento vengono costituite con *bimestralità* — considerate posticipate — il cui pagamento viene fatto dagli agenti riscuotitori delle sovrimposte fondiarie, comunale e provinciale, dietro ordini detti *Delegazioni*.

Se A rappresenta l'importo della annualità da pagare, si trova, colla formula del montante posticipato facendovi

$$n=m=6$$

$$A=6a\left(1+\frac{6-1}{2\,.\,6}r\right)=a\left(6+\frac{5}{2}r\right)$$

quindi

$$a=\frac{A}{6+\frac{2}{5}r}$$

36. *Periodicità ad interesse composto costanti.* — Supponendo l'interesse composto, ricordando i tempi d'impiego già detti, si avranno, riferiti all'Epoca, i seguenti valori
per la prima rata

$$a(1+r)^{\frac{n-1}{m}+t}$$

per la seconda

$$a(1+r)^{\frac{n-1}{m}+t}$$

. . . . . .

per la k^{ma}

$$a(1+r)^{\frac{n-k}{m}+t}$$

. . . . . .

per la n^{ma}

$$a(1+r)^{t}$$

Prima di sommare questi n valori si osservi che essi formano una progressione geometrica: infatti il rapporto tra un termine qualunque, il k^{mo}, ed il precedente $(k-1)^{mo}$ è costante, non dipende da k.

$$a(1+r)^{\frac{n-k}{m}+t} : a(1+r)^{\frac{n-(k-1)}{m}+t} =$$

$$= (1+r)^{\frac{n-k-[n-(k-1)]}{m}} = (1+r)^{-\frac{1}{m}}$$

Ora la somma dei termini di una progressione geometrica finita, di ragione $\neq 1$, è data dal quoziente che si ottiene dividendo per la differenza fra l'unità e la ragione, la differenza fra il primo termine ed il prodotto dell'ultimo per la ragione; quindi — essendo $(1+r)^{-\frac{1}{m}} \neq 1$

$$S = \frac{a(1+r)^{\frac{n-1}{m}+t} - a(1+r)^{t}(1+r)^{-\frac{1}{m}}}{1-(1+r)^{-\frac{1}{m}}} =$$

$$= a(1+r)^{t}\,\frac{(1+r)^{\frac{n-1}{m}} - (1+r)^{-\frac{1}{m}}}{1-(1+r)^{-\frac{1}{m}}}$$

e moltiplicando sopra e sotto per $(1+r)^{\frac{1}{m}}$, osservando che $(1+r)^{-\frac{1}{m}}\,(1+r)^{\frac{1}{m}} = 1$, abbiamo

$$1)\quad S = a(1+r)^{t}\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}} - 1}{(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1}$$

Se il periodo di tasso coincide con quello di rata, cioè per $m = 1$

$$S = a(1+r)^{t}\,\frac{(1+r)^{n}-1}{1+r-1} = a(1+r)^{t}\,\frac{(1+r)^{n}-1}{r}$$

Questa semplificazione si può in ogni caso ottenere quando si possa conoscere il tasso r_m *equivalente* per il periodo di rata, a quello dato r. Infatti, essendo

$$1+r = (1+r_m)^m$$

$$(1+r)^t = (1+r_m)^{mt}$$

$$(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 = r_m$$

$$(1+r)^{\frac{n}{m}} = (1+r_m)^n$$

sostituendo nella 1) si ha

$$S = a(1+r_m)^{mt}\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$$

Se il tasso dato è convertibile m volte per periodo, $\frac{r}{m}$ è il tasso per periodo di rata e la formula diventa

$$S = a\left(1+\frac{r}{m}\right)^{t}\,\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}-1}{\frac{r}{m}}$$

(dove t si suppone già espresso in periodi di rata).

37. — Diamo ora a t particolari valori, la 1) diventa per

a) $t = 0$ (Montante posticipato)

$$S = a\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}} - 1}{(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1}$$

b) $t = \frac{1}{m}$ (Montante anticipato)

$$S = a(1+r)^{\frac{1}{m}}\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}} - 1}{(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1}$$

c) $t = -\frac{n-1}{m}$ (Valore attuale semplicemente anticipato)

$$S = a\,(1+r)^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{m}}\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1} = a\,(1+r)^{\frac{1}{m}}\,\frac{1-(1+r)^{-\frac{n}{m}}}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}$$

d) $t = -\dfrac{n}{m}$ (Valore attuale immediato)

$$S = a\,(1+r)^{-\frac{n}{m}}\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1} = a\,\frac{1-(1+r)^{-\frac{n}{m}}}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}$$

e) $t = -\left(\dfrac{n}{m}+k\right)$ (Valore attuale differito di k)

$$S = a\,(1+r)^{-\frac{n}{m}-k}\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1} = a\,(1+r)^{-k}\,\frac{1-(1+r)^{-\frac{n}{m}}}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}$$

f) $t = -\left(\dfrac{n}{m}-k\right)$ (Valore attuale anticipato di k)

$$S = a\,(1+r)^{-\frac{n}{m}+k}\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1} = a\,(1+r)^{k}\,\frac{1-(1+r)^{-\frac{n}{m}}}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1},$$

Le semplificazioni che si hanno per $m=1$, o coll'uso del tasso convertibile sono evidenti e notevoli.

38. *Perpetuità.* — Nell'ultima forma del valore attuale si faccia crescere indefinitamente n (tendere all'infinito positivo). Allora i valori della potenza $(1+r)^{-\frac{n}{m}}$, essendo la base >1

diminuiscono, pure restando positivi, e si avvicinano indefinitamente allo zero — tendono al limite 0. Avremo dunque

$$\lim_{n=\infty} S = (1+r)^{k}\,\frac{a}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1},$$

e se $m=1$;

$$S = (1+r)^{k}\,\frac{a}{r}$$

e da entrambe per $k=0$ (immediato)

$$S = \frac{a}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}$$

$$S = \frac{a}{r}$$

Le varianti, nel capo del tasso convertibile, sono evidenti.

Osservando che nelle due ultime formule trovate i denominatori rappresentano i tassi per il periodo di rata, si può dire che: *il valore attuale di una perpetuità immediata si ottiene dividendo la rata per il tasso di corrispondente periodo.*

Per avere le formule per le perpetuità differite basta mutare segno a k.

39. *Variabili.*

1°. ***In progressione aritmetica.*** — Indichiamo con a la prima rata, e con $d \gtrless 0$ l'incremento di essa. Per maggiore semplicità di calcolo supporremo il periodo di tasso uguale a quello di rata ($m=1$).

Gli importi delle successive rate saranno

$$a \;,\; a+d \;,\; a+2d \;,\; \ldots\ldots \;,\; a+(n-1)\,d$$

ed il valore della periodicità sarà dato dalla somma:

$$S = a\,(1+r)^{n-1+t} + (a+d)\,(1+r)^{n-2+t} + (a+2d)\,(1+r)^{n-3+t} + \ldots + [a+(n-1)\,d]\,(1+r)^{t}.$$

Moltiplichiamo questa uguaglianza per $(1+r)^{-1}$

$$S(1+r)^{-1} = a\,(1+2)^{n-2+t} + (a+d)\,(1+r)^{n-3+t} + (a+2d)\,(1+r)^{n-4+t} + \ldots + [a+(n-1)\,d]\,(1+r)^{t-1}$$

e sottraendola dalla precedente si ha:

$$S - S(1+r)^{-1} = a\,(1+r)^{n-1+t} + d\,(1+r)^{n-2+t} + d\,(1+r)^{n-3+t} + \ldots + d\,(1+r)^{t} - [a+(n-1)\,d]\,(1+r)^{t-1}$$

e svolgendo l'ultimo addendo del secondo membro

$$-[a+(n-1)d](1+r)^{t-1} = -a(1+r)^{t-1} - \\ -nd(1+r)^{t-1} + d(1+r)^{t-1}$$

sostituendo ed ordinando:

$$S\frac{r}{1+r} = a(1+r)^{n-1+t} - a(1+r)^{t-1} - nd(1+r)^{t-1} + \\ + d(1+r)^{n-2+t} + \ldots + d(1+r)^{t-1}.$$

Raccogliendo nel secondo membro $(1+r)^{t-1}$ a fattor comune e sommando gli addendi positivi contenenti d

$$S\frac{r}{1+r} = (1+r)^{t-1}\left[a\left\{(1+r)^n - 1\right\} - nd + d\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$$

da cui

$$S = (1+r)^t\left[a\frac{(1+r)^n-1}{r} - \frac{nd}{r} + \frac{d}{r}\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$$

e finalmente

$$S = (1+r)^t\left[\left(a+\frac{d}{r}\right)\frac{(1+r)^n-1}{r} - \frac{nd}{r}\right].$$

Se si fa $d=0$, si trova la formula delle costanti. Se $t=-n+k$

$$S = (1+r)^k\left[\left(a+\frac{d}{r}\right)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - \frac{nd}{r(1+r)^n}\right].$$

Se si fa crescere n senza limite si ha il valore attuale delle perpetuità in progressione aritmetica, che facilmente si dimostra essere uguale ad

$$\left(a+\frac{d}{r}\right)\frac{(1+r)^k}{r}$$

valore che per essere finito e positivo richiede

$$a+\frac{d}{r}>0 \quad \text{cioè} \quad d>-ar.$$

40. — 2°. *In progressione geometrica.* — Sia a la prima rata, q la ragione della loro progressione; le rate successive saranno:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3\ \ldots.\ aq^{n-2},\ aq^{n-1}.$$

Il valore della periodicità sarà dato dalla somma

$$S = a(1+r)^{n-1+t} + aq(1+r)^{n-2+t} + aq^2(1+r)^{n-3+t} + \\ + \ldots + aq^{n-2}(1+r)^{1+t} + aq^{n-1}(1+r)^t.$$

Gli addendi del secondo membro formano una progressione geometrica;

infatti il rapporto tra il k^{mo} ed il precedente è costante, non dipende da k.

$$aq^{k-1}(1+r)^{n-k+t} : aq^{k-2}(1+r)^{n-(k-1)+t} = \\ = q^{k-1-(k-2)}(1+r)^{n-k-n+(k-1)} = q(1+r)^{-1}.$$

Supponiamo $q(1+r)^{-1} \neq 1$; sarà

$$S = \frac{a(1+r)^{n-1+t} - aq^{n-1}(1+r)^t\, q(1+r)^{-1}}{1-q(1+r)^{-1}}$$

$$S = a(1+r)^t\,\frac{(1+r)^n - q^n}{(1+r)-q}.$$

Se si fa $q=1$ si ha la formula per le periodicità costanti.
Nel caso che sia $t=-n+k$,

$$S = a(1+r)^k\,\frac{1-\left(\frac{q}{1+r}\right)^n}{(1+r)-q}$$

Se $q<1+r$, quindi $\frac{q}{1+r}<1$, passando al limite per $n=\infty$ si ottiene il valore attuale delle perpetuità in progressione geometrica

$$\lim_{n=\infty} S = (1+r)^k\,\frac{a}{(1+r)-q}.$$

41. *Ammortamento.* — Dalla formula 1) si ottiene per a

$$1_a) \quad a = S(1+r)^{-t}\,\frac{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}$$

La periodicità può essere costituita da somme che si pagano per estinguere un debito, oppure da prelevamenti da un capitale fruttifero; si dice allora periodicità d'*ammortamento*.

Dalla formula 1) si ha pure

$$S(1+r)^{-t} = a\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}$$

Il primo membro è il valore del capitale debito riferito alla valuta dell'ultima rata, il secondo è il montante posticipato delle n rate. Se moltiplichiamo ambo i termini per $(1+r)^k$, k qualunque, l'uguaglianza sussiste e dice che, qualunque sia il momento comune di valutazione per il capitale e per la periodicità, il valore della rata è lo stesso (1).

(1) Il che, come si è visto, non avviene coll'interesse semplice.

È necessario però che il tasso che serve per S sia lo stesso di quello che valuta la periodicità. Se questo non avviene, la scelta dell'Epoca comune non è indifferente.

Prendendo come Epoca la valuta dell'ultima rata e facendo $-t = q$ (cosicchè q indica il tempo fra la scadenza del debito e l'ultima valuta) abbiamo

$$S(1+r_1)^q = a\,\frac{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}$$

da cui

$$2)\quad a = S(1+r_1)^q\,\frac{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}{(1+r)^{\frac{n}{m}}-1}$$

Se poi si paga periodicamente l'interesse al creditore, il debito alla valuta dell'ultima rata sarà sempre S, la rata da mettere da parte

$$\frac{Sr}{(1+r)^n-1}$$

e la somma periodica complessiva a carico del debitore

$$3)\quad Sr_1 + \frac{Sr}{(1+r)^n-1} = S\,\frac{r_1(1+r)^n-(r-r_1)}{(1+r)^n-1}$$

donde facendo $r = r_1$ si ottiene la formula (1_a) solita.

Quando su un debito fruttifero si pagano degli acconti periodici, ed ogni volta per trovare il debito fruttifero residuo si aggiunge l'interesse sull'ultimo importo del debito a partire dall'ultimo acconto *(interesse scalare)* e si deduce il nuovo acconto, capitale ed acconti possono considerarsi fruttiferi ad interesse composto, al medesimo tasso.

Sia S la somma avuta a prestito, r il tasso per un certo periodo ed $a_1\ a_2\ a_3$ tre acconti supposti distanti l'uno dall'altro di un periodo di tasso, ed il primo dalla valuta del debito. Dopo il pagamento del primo acconto il debito residuo R_1 è uguale all'iniziale più l'interesse maturato, meno l'acconto. Così dopo i pagamenti successivi

$$R_1 = S + Sr - a_1 = S(1+r) - a_1$$
$$R_2 - R_1 + R_1 r - a_2 = R_1(1+r) - a_2 = [S(1+r) - a_1](1+r) - a_2 =$$
$$= S(1+r)^2 = a_1(1+r) - a_2$$
$$R_3 = R_2 + R_2 r - a_3 = R_2(1+r) - a_3 = [S(1+r)^2 - a_1(1+r) - a_2](1+r) - a_3$$
$$= S(1+r)^3 - a_1(1+r)^2 - a_2(1+r) - a_3$$

e dopo n acconti

$$R_n = R_{n-1} + R_{n-1}r - a_n = R_{n-1}(1+r) - a_n =$$
$$= [S(1+r)^{n-1} - a_1(1+r)^{n-2} - \ldots - a_{n-1}](1+r) - a_n =$$
$$= S(1+r)^n - a_1(1+r)^{n-1} - \ldots - a_{n-1}(1+r) - a_n$$

Se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$

$$R_n = S(1+r)^n - a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

L'ammortamento sarà completo se $R_n = 0$, se cioè

$$S(1+r)^n = a\,\frac{(1+)^n - 1}{r} \quad \text{ed}$$

$$a = \frac{Sr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad \text{che è la } 1^{a}) \text{ c. d. d.}$$

Questo è uno dei casi pratici più semplici e frequenti (1) cui la legge dell'interesse composto è verificata completamente.

Per $r = r_1$ e $q = n + k$ (cioè $t = -(n+k)$)

$$4)\quad a = \frac{Sr(1+r)^{n+k}}{(1+r)^n - 1}$$

(ammortamento differito di k).

Bisogna tener ben presente il significato di t e dei simboli derivati. Perchè se si contrae un debito e si pagano ratealmente gli interessi, cominciando più tardi il pagamento delle rate d'ammortamento, non vi ha nella formula (4) *periodo di differimento* $(k = 0)$. *Il periodo di differimento è il tempo compreso tra il momento in cui incominciano a decorrere gli interessi da capitalizzare col debito ed il momento in cui le rate risultano immediate.*

Così talvolta avviene per i prestiti contratti da società: solo gli interessi vengono pagati per alcuni anni, poi si incomincia l'ammortamento del debito.

Quanto precede vale anche per le periodicità variabili.

---

(1) V. Marie, *Tr. math. et pratique des opérations financières.*
Se si cede al creditore un immobile perchè ne porti le rendite ad estinzione dell'interesse ed alla riduzione del debito residuo, si ha il contratto di *anticrèsi* (v. Cod. civ. art. 1891 e segg.).

42. *Questioni inverse. Determinazione di r.* — La formula generale 1) rappresenta, nei casi pratici, una equazione di grado elevato rispetto ad r, e perciò non risolubile algebricamente.

Possiamo trovare dei metodi approssimati, dopo la seguente *Osservazione*: Se nella formula generale si sostituisce il tasso per il periodo di rata, r_m, sia esso quello equivalente o quello — nel caso del convertibile — proporzionale, la formula come si è già visto, diventa

$$S = a\,(1 + r_m)^{t_1}\,\frac{(1 + r_m)^n - 1}{r_m}$$

(dove t_1 è il valore di t, espresso in periodi di rata).

Si trova il valore di r_m e poi si determina r colla relazione

$$r = (1 + r_m)^m - 1$$

se il tasso non è convertibile, ed

$$r = m\,r_m$$

se lo è. Si noti però che con quest'ultimo si ha il tasso *nominale*, se si vuole l'*effettivo* bisogna adoperare la precedente.

1°. Si può applicare la regola di falsa posizione, anche ripetutamente. Il calcolo del risultato per i valori supposti di r, può essere evitato, in una prima approssimazione, quando è $t = 0$, oppure $= 1$, oppure $= -n$, perchè esistono *tavole* che danno i valori di S per $a = 1$. La formula generale si può scrivere

$$\frac{S}{a} = (1 + r_m)^{t_1}\,\frac{(1 + r_m)^n - 1}{r_m}$$

Si cerca nella tavola sulla linea corrispondente ad n fra quali valori è compreso $\frac{S}{a}$ e si notano i tassi relativi. Si applica subito la regola di falsa posizione.

Supponiamo: $t = o$, $a = 100$, $n = 20$, $m = 2$, $S = 2378{,}176$ ed r *non convertibile.* $\frac{S}{a} = 23{,}78176$.

Nelle tavole si trova per $n = 20$, $\frac{S}{a}$ compreso fra 24,29737 che corrisponde al 2 %, e 23,12366 che corrisponde all' 1 ½ %. Il tasso cercato è dunque compreso fra 1 ½ e 2 %.

Applichiamo la regola di falsa posizione.

Errori:	2 %	$S = 24{,}29737$		1 ½ %	$S = 23{,}12366$
	x	$S = 23{,}78176$		x	$S = 23{,}78176$
	e''	$+\ 0{,}51561$		e'	$-\ 0{,}65810$

quindi $r_2 = \dfrac{0{,}015 \cdot 0{,}51561 + 0{,}02 \cdot 0{,}65810}{0{,}51561 + 0{,}65810} = 0{,}017803$

Ed $r = (1 + r_2)^2 - 1 = 1{,}017803^2 - 1 = 0{,}035911$ (invece del 3.6 %).

Più esatto risultato si sarebbe ottenuto se le tavole avessero dato i valori di $\frac{S}{a}$ per valori più vicini di r, per es. di 0,25 in 0,25 %. Non disponendo di tavole o non potendole utilizzare per il valore speciale di t, occorre il calcolo diretto di S: nella scelta dei tassi ordinari la miglior guida è la pratica (1).

2°. Applicare la formula di *Halley*, generalizzata (2):

$$r = b \pm \sqrt{b^2 - 2\,b\,y}$$

dove è

$$b = \frac{6\,(-2\,t - n + 1)}{n^2 - 1} \quad \text{ed} \quad y = \left(\frac{S}{a\,n}\right)^{-\frac{2}{-2\,t - n + 1}} - 1$$

Il radicale va preso col segno — se $b > 0$, col segno + se $b < 0$.

Applicando i dati dell'esempio precedente, osserviamo che essendo $t = 0$, si ha $-2t - n + 1 = -(n - 1)$ e che $-\frac{2}{-(n-1)} = \frac{2}{n-1}$

(1) Un metodo originale di approssimazione, per il caso dei valori attuali è dovuto all'Enrico De Montel, *Metodo a doppia convergenza ecc.*, nel *Giornale di matematica finanziaria*, 1907 n. 1.

(2) È data per due casi particolari da A. Aubry nel *Journal de matematiques élémentaires*, 1893 n. 3.

$$\text{Perciò } b = \frac{-6\,(20-1)}{20^2-1} = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7}$$

$$y = \left(\frac{2378{,}176}{100 \cdot 20}\right)^{\frac{2}{20-1}} - 1 = 0{,}01838938$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 2\,\frac{2}{7}\,0{,}01838938} - \frac{2}{7} = 0{,}017832$$

Quindi $r = 1{,}017832^2 - 1 = 0{,}035939$ (invece di 3,6 %).

3°. Applicare la seguente formula, ottenuta dalla precedente con procedimenti approssimati dall'attuario inglese *Sir Francis Baily*

$$r = y\,\frac{12\,(-2t-n+1) - y\,(n^2-1)}{12\,(-2t-n+1) - 2\,y\,(n^2-1)}$$

dove y ha il significato già detto.

Coi dati della solita applicazione abbiamo

$$r_2 = 0{,}01838938\,\frac{-12\,(20-1) - 0{,}01838938\,(20^2-1)}{-12\,(20-1) - 2\cdot 0{,}01838938\,(20^2-1)} =$$

$$= 0{,}01838938\,\frac{12 + 0{,}01838938\,.\,21}{12 + 2\cdot 0{,}01838938\,.\,21} =$$

$$r_2 = 0{,}0178333$$

$$r = 1{,}0178333^2 - 1 = 0{,}0359846.$$

Osservazione: Le formule di Halley e di Baily non si possono applicare: per i valori di t che annullano $-2t-n+1$, cioè per $t = \frac{1-n}{2}$ e nemmeno per valori a questo vicini; quando $an = S$ perchè allora y si annulla.

4°. Per i seguenti valori di t, applicare le formule seguenti: per $t = -n$, la formula data dal *Montferrier* nel suo *Dizionario di matematica*

$$r = \frac{q}{1} - \frac{\frac{n+2}{3}q}{1} - \frac{n-1}{12}\,q$$

dove è

$$q = \frac{2\,(an - S)}{an\,(n+1)}\ (^1)$$

per $t = 0$ la seguente, che ho calcolato in modo analogo

$$r = \frac{p}{1} + \frac{\frac{n-2}{3}p}{1} + \frac{n+1}{12}\,p$$

dove è

$$p = \frac{2\,(S - an)}{an\,(n-1)}\ (^1)$$

Queste formule hanno il vantaggio di potersi applicare senza uso di tavole di annualità o di logaritmi.

Coi dati della solita applicazione, usando l'ultima di queste due formule si ha

$$p = \frac{2\,(2378{,}176 - 20\cdot 100)}{20\cdot 100\,(20-1)} = 0{,}019904$$

$$r_2 = \frac{0{,}019904}{1 + \dfrac{0{,}019904\ \frac{20-2}{3}}{1 + 0{,}019904\ \frac{20+1}{12}}}$$

$r_2 = 0{,}017845$

$r = 1{,}017845^2 - 1 = 0{,}036008$ (invece del 3,6 %).

43. — *Per le perpetuità* possiamo determinare r_m oltrechè colla regola di falsa posizione, anche colle seguenti formule; dove è

$$b = S - ak\,m, \quad \text{e} \quad d = a^2\,k\,m\,(k\,m - 1)$$

1°. Se k *è molto piccolo* e bastano valori discretamente approssimati

$$r_m = \frac{a}{b}$$

(1) Questo à il valore di r per le periodicità ad interesse semplice nel caso corrispondente (già trovato per il valore attuale immediato).

2°. Negli altri casi

$$r_m = \frac{a\,(2\,b^2 - d)}{2\,b\,(b^2 - d)}$$ (1)

E da entrambe, se $k = 0$, è $b = S$, $d = 0$ quindi

$$r_m = \frac{a}{S}$$

Applicazione: *Una rendita perpetua di L. 1,75 semestrali, quattro mesi prima della scadenza della prima rata, viene pagata L. 94. Trovare il tasso annuo, non convertibile, in base al quale è stata calcolata.*

Abbiamo $m = 2$, $k = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $a = 1{,}75$ $S = 94$, $b = 94 - 1{,}75\,\frac{1}{6}\,2 =$

$= 93{,}4166\ldots$, $d = 1{,}75^2\,\frac{1}{6}\,2\left(\frac{1}{6}\,2 - 1\right) = -0{,}680555$.

Applicando la prima, $r_2 = \frac{1{,}75}{93{,}41666} = 0{,}0187333$.

Applicando la seconda, $r_2 = \frac{1 \cdot 75\,(2 \cdot 93{,}4166^2 + 0{,}680555)}{2 \cdot 93{,}4166\,(93{,}4166^2 + 0{,}680555} =$

$$= \frac{30544{,}54}{1630555} = 0{,}0187326.$$

Da cui si ha r.

$$r = 1{,}0187326^2 - 1 = 0{,}03781.$$

Determinazione di r per le rate in progressione geometrica

Si trasforma la formula che dà S così:

$$S = a\,(1+r)^t\,\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q} = a\,(1+r)^t\,\frac{q^n\left[\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1\right]}{q\left[\frac{1+r}{q} - 1\right]} =$$

$$= a\,(1+r)^t\,q^{n-1}\,\frac{\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1}{\frac{1+r}{q} - 1} = a\,q^{n-1+t}\,\frac{(1+r)^t}{q^t}\,\frac{\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1}{\frac{1+r}{q} - 1}$$

$$= a\,q^{n-1+t}\left(\frac{1+r}{q}\right)^t\,\frac{\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1}{\frac{1+r}{q} - 1}$$

(1) Si trova anche in Marie, op. cit. pag. 324.

Posto $\frac{1+r}{q} = 1 + x$

$$S = a\,q^{n-1+t}\,(1+x)^t\,\frac{(1+x)^n - 1}{x}.$$

Si risolve con uno dei procedimenti noti, rispetto al tasso ausiliario x e si ottiene r dalla fatta posizione.

44. — *Determinazione di m.*

Nei rari casi in cui questo problema può presentarsi non può pensarsi ad una risoluzione diretta rispetto ad m dell'equazione rappresentata dalla formula 1).

Se è $t = \frac{k}{m}$ facendo la sostituzione del tasso per il periodo di rata la formula 1) diventa

$$S = a\,(1+r_m)^{mt}\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m} = a\,(1+r_m)^k\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$$

dove l'incognita non appare. Così pure se $t = 0$, perchè allora è pure $k = 0$.

Si risolve rispetto ad r_m con uno dei metodi noti e dalla relazione che passa tra r_m ed r si trova m. Infatti:

se il tasso è convertibile $\frac{r}{m} = r_m$ e quindi $m = \frac{r}{r_m}$

se il tasso non è convertibile

$$(1+r_m)^m = 1 + r$$

$$m \log\,(1+r_m) = \log\,(1+r)$$

$$m = \frac{\log\,(1+r)}{\log\,(1+r_m)}$$

Se $t \neq 0$ è indipendente da m ed il tasso non è convertibile, essendo

$$(1+r_m)^{tm} = (1+r)^t$$

sostituendo nella prima formula trovata in questo paragrafo

$$S = a\,(1+r)^t\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$$

da cui $S(1+r)^{-t} = a\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$.

Calcolato il primo membro, che indicheremo con S_1

$$S_1 = a\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$$

si determina r_m e poi r.

Se il tasso è convertibile si ha $(1+r_m)^{tm} \neq (1+r)$ quindi la precedente sostituzione non si può fare. *Supponendo* quei due valori uguali si può procedere come è stato già fatto ottenendo però valori meno approssimati.

2°. Negli altri casi

$$r_m = \frac{a\,(2\,b^2 - d)}{2\,b\,(b^2 - d)}$$ (1)

E da entrambe, se $k = 0$, è $b = S$, $d = 0$ quindi

$$r_m = \frac{a}{S}$$

Applicazione: *Una rendita perpetua di L. 1,75 semestrali, quattro mesi prima della scadenza della prima rata, viene pagata L. 94. Trovare il tasso annuo, non convertibile, in base al quale è stata calcolata.*

Abbiamo $m = 2$, $k = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $a = 1{,}75$ $S = 94$, $b = 94 - 1{,}75\,\frac{1}{6}\,2 =$

$= 93{,}4166\ldots$, $d = 1{,}75^2 \cdot \frac{1}{6}\,2\left(\frac{1}{6}\,2 - 1\right) = -\,0{,}680555$.

Applicando la prima, $r_2 = \dfrac{1{,}75}{93{,}41666} = 0{,}0187333$.

Applicando la seconda, $r_2 = \dfrac{1 \cdot 75\,(2 \cdot 93{,}4166^2 + 0{,}680555)}{2 \cdot 93{,}4166\,(93{,}4166^2 + 0{,}680555} =$

$$= \frac{30544{,}54}{1630555} = 0{,}0187326.$$

Da cui si ha r.

$$r = 1{,}0187326^2 - 1 = 0{,}03781.$$

Determinazione di r per le rate in progressione geometrica

Si trasforma la formula che dà S così:

$$S = a\,(1+r)^t\,\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q} = a\,(1+r)^t\,\frac{q^n\left[\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1\right]}{q\left[\frac{1+r}{q} - 1\right]} =$$

$$= a\,(1+r)^t\,q^{n-1}\,\frac{\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1}{\frac{1+r}{q} - 1} = a\,q^{n-1+t}\,\frac{(1+r)^t}{q^t}\,\frac{\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1}{\frac{1+r}{q} - 1}$$

$$= a\,q^{n-1+t}\left(\frac{1+r}{q}\right)^t\,\frac{\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1}{\frac{1+r}{q} - 1}$$

(1) Si trova anche in Marie, op. cit. pag. 324.

Posto $\dfrac{1+r}{q} = 1 + x$

$$S = a\,q^{n-1+t}\,(1+x)^t\,\frac{(1+x)^n - 1}{x}.$$

Si risolve con uno dei procedimenti noti, rispetto al tasso ausiliario x e si ottiene r dalla fatta posizione.

44. — *Determinazione di m.*

Nei rari casi in cui questo problema può presentarsi non può pensarsi ad una risoluzione diretta rispetto ad m dell'equazione rappresentata dalla formula 1).

Se è $t = \dfrac{k}{m}$ facendo la sostituzione del tasso per il periodo di rata la formula 1) diventa

$$S = a\,(1+r_m)^{mt}\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m} = a\,(1+r_m)^k\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$$

dove l'incognita non appare. Così pure se $t = 0$, perchè allora è pure $k = 0$.

Si risolve rispetto ad r_m con uno dei metodi noti e dalla relazione che passa tra r_m ed r si trova m. Infatti:

se il tasso è convertibile $\dfrac{r}{m} = r_m$ e quindi $m = \dfrac{r}{r_m}$

se il tasso non è convertibile

$$(1+r_m)^m = 1 + r$$

$$m \log\,(1+r_m) = \log\,(1+r)$$

$$m = \frac{\log\,(1+r)}{\log\,(1+r_m)}$$

Se $t \neq 0$ è indipendente da m ed il tasso non è convertibile, essendo

$$(1+r_m)^{tm} = (1+r)^t$$

sostituendo nella prima formula trovata in questo paragrafo

$$S = a\,(1+r)^t\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$$

da cui $\quad S\,(1+r)^{-t} = a\,\dfrac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$.

Calcolato il primo membro, che indicheremo con S_1

$$S_1 = a\,\frac{(1+r_m)^n - 1}{r_m}$$

si determina r_m e poi r.

Se il tasso è convertibile si ha $(1+r_m)^{tm} \neq (1+r)$ quindi la precedente sostituzione non si può fare. *Supponendo* quei due valori uguali si può procedere come è stato già fatto ottenendo però valori meno approssimati.

1° *Esempio. — L. 2073,367 è il valore attuale di 20 rate di L. 100 riferite alla scadenza della 14ª di esse, al tasso non convertibile del 4 %. Determinare il rapporto tra il periodo di tasso e quello di rate.*

Si ha $t = -\frac{6}{m}$ e perciò m deve soddisfare alla relazione

$$2073{,}367 = 100 \cdot 1{,}04^{-\frac{6}{m}} \frac{1{,}04^{\frac{20}{m}} - 1}{1{,}04^{\frac{1}{m}} - 1}$$

sostituendo a 0,04 il tasso r_m equivalente per il periodo di rata si avrebbe

$$2073{,}367 = 100\ (1 + r_m)^{-6} \frac{(1 + r_m)^{20} - 1}{r_m}.$$

Determiniamo r_m colla formula di Baily

$$t = -6, \quad n = 20, \qquad -2t - n + 1 = -7$$

$$y = \left(\frac{2073{,}367}{20 \cdot 100}\right)^{\frac{2}{1}} - 1 = 0{,}01034649$$

$$r_m = 0{,}01034649 \frac{-7 \cdot 12 - 0{,}01034649\,(20^2 - 1)}{-7 \cdot 12 - 2 \cdot 0{,}1034649\,(20^2 - 1)} = 0{,}00988456$$

$$m = \frac{\log\ (1 + r)}{\log\ (1 + r_m)} = \frac{\log\ 1{,}04}{\log\ 1{,}00988456} = \frac{0{,}01703334}{0{,}00427173} = 3{,}987.$$

Arrotondando in 4 e sostituendo ad m questo valore la relazione da cui siamo partiti resta soddisfatta.

Quindi, se il 4 % è annuale, le rate sono trimestrali.

2° *Esempio. — Cinque anni prima della scadenza dell'ultima rata, 20 versamenti di L. 100 valutati al 5 % annuo hanno il valore complessivo di L. 1836,918. Trovare il rapporto tra il periodo di tasso e quello di rata.*

Si ha t indipendente da m ed $= -5$. Allora m deve soddisfare la relazione

$$1836{,}918 = 100 \cdot 1{,}05^{-5} \frac{(1 + r_m)^{20} - 1}{r_m}$$

$$1836{,}918 \cdot 1{,}05^5 = 100 \frac{(1 + r_m)^{20} - 1}{r_m}$$

$$2344{,}424 = 100 \frac{(1 + r_m)^{20} - 1}{r_m}.$$

Applichiamo la formula di Baily, osservando che *ora* $t = 0$ quindi

$$-\frac{2}{-2t - n + 1} = \frac{2}{19}$$

$$y = \frac{2344{,}424^{\frac{2}{19}}}{20 \cdot 120} - 1 = 0{,}01686619$$

$$r_m = 0{,}01686619 \frac{-12\,(20 - 1) - 0{,}01686619\,(20^2 - 1)}{-12\,(20 - 1) - 2 \cdot 0{,}01686619\,(20^2 - 1}$$

$$= 0{,}01686619 \frac{12 + 0{,}01686619 \cdot 21}{2 + 2 \cdot 0{,}01686619 \cdot 21} = 0{,}016396.$$

Quindi $m = \frac{\log\ 1{,}05}{\log\ 1{,}016396} = \frac{0{,}02118930}{0{,}00706295} = 3$ con lievissimo eccesso.

I versamenti sono dunque quadrimestrali.

45. *Determinazione di* n (numero delle rate). — Dalla formula 1), supposto t indipendente da n, si ha successivamente

$$S\,[(1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1] = a\,(1 + r)^{\frac{n}{m} + t} - a\,(1 + r)^t$$

$$S\,[(1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1] + a\,(1 + r)^t = a\,(1 + r)^{\frac{n}{m} + t}$$

e prendendo i logaritmi d'ambo i membri

$$\frac{n}{m} + t = \frac{\log\{S\,[(1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1] + a\,(1 + r)^t\} - \log a}{\log\,(1 + r)}$$

da cui n.

Se t dipende da n, le formule cambiano, ma si ottengono tutte nello stesso modo. Sia per esempio $t = -(n - 1)$ ed $m = 1$ (valore attuale anticipato). La formula 1) diventa

$$S = a\,(1 + r)^{-(n-1)} \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

$$S\,r\,(1 + r)^{n-1} = a\,(1 + r)^n - a$$

$$a\,(1 + r)^n - S\,r\,(1 + r)^{n-1} = a$$

$$(1 + r)^{n-1}\,[a\,(1 + r) - S\,r] = a$$

$$n - 1 = \frac{\log a - \log\,[a\,(1 + r) - S\,r]}{\log\,(1 + r)}$$

da cui n.

Si deve, a questo proposito, ricordare quanto fu detto rispetto ad n risolvendo l'analogo problema colle periodicità ad interesse semplice, e le differenti soluzioni pratiche del problema, se si trovasse un valore non intero.

Esempio: A quante rate di L. 1200 annuali è equivalente la somma di L. 10000 disponibile 3 anni dopo della scadenza dell'ultima rata? (tasso 4%).

Si ha: t indipendente da n ed uguale a 3; $m = 1$, e si adopera la prima formula ottenuta in questo paragrafo.

$$n + 3 = \frac{\log\,(10000 \cdot 0{,}04 + 1200 \cdot 1{,}04^3) - \log 1200}{\log 1{,}04} = 9{,}6168$$

da cui $n = 6{,}6168$.

Questo risultato significa che una delle 6 rate deve essere maggiore di 1200. Supponiamo che questa sia la seconda.

L'aumento richiesto sarà pari alla differenza tra il valore di 10000 e quello delle 6 rate riferiti alla scadenza della seconda di queste, scontando il capitale per 7 anni e prendendo $t = -4$.

$$10000 \cdot 1{,}04^{-7} = 7599{,}178$$
$$1200 \cdot 1{,}04^{-4}\,\frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} = 6803{,}874$$
$$\text{Aumento richiesto} \quad 795{,}308$$

volendo modificare tutte le rate, si determina

$$a_1 = \frac{10000 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^{-3}}{1{,}04^6 - 1} = 1340{,}26.$$

Se si vuol modificare t, deve essere

$$10000 = 1200 \cdot 1{,}04^t\,\frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04}$$

da cui si trae $t = 5$ anni 9 mesi 25 giorni.

46. — Un aspetto particolare assume questo problema nel caso dell'ammortamento. Dalla formula 4) si ha successivamente

$$a(1+r)^n - a = S\,r\,(1+r)^{n+k}$$
$$a(1+r)^n - S\,r\,(1+r)^{n+k} = a$$
$$(1+r)^n\,[a - S\,r\,(1+r)^k] = a$$

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - S\,r\,(1+r)^k}$$

Applicando i logaritmi si ottiene n.

Nel secondo membro il denominatore è una differenza fra quantità dello stesso segno e possiamo quindi avere tre casi

$$a - S\,r\,(1+r)^k \gtreqless 0$$

Nel primo caso il problema è possibile e si avrà per n un valore reale (intero o frazionario qui non importa). Nel secondo la frazione prende la forma $\frac{a}{0}$ che non ha significato.

Ma se, partendo dal primo caso immaginiamo che la differenza $a - S\,r\,(1+r)^k$ diminuisca, restando positiva, e si avvicini continuamente allo zero (tenda al limite zero) vediamo che il valore della frazione, e quindi del primo membro della uguaglianza, va crescendo senza limite, cioè tende all'infinito. Perciò, essendo $1 + r > 0$ e finito, *n tende all'infinito*. L'ammortamento non ha termine.

Se poi il denominatore (3° caso) è negativo, possiamo scrivere

$$(1+r)^n = -\,\frac{a}{S\,r\,(1+r)^k - a}$$

Perchè questa uguaglianza sussista bisognerebbe che la potenza n^{ma} di un numero positivo $(1 + r > 1)$ potesse essere un numero negativo. Si vede che il problema è impossibile.

Ci si può dare ragione di queste conclusioni in altro modo. Se S è l'importo originario del debito, $S(1+r)^k$ è il suo importo al momento in cui le rate sono immediate e $S\,r\,(1+r)^k$ è il suo interesse alla scadenza della prima rata. Se si vuole che il debito si estingua, sia pure in un tempo lontano, occorre che la rata a superi l'interesse maturato alla sua scadenza, in modo che la differenza $a - S\,r\,(1+r)^k$ possa ridurre il capitale fruttifero. Se invece (2° caso) la rata è pari all'interesse periodico, estinto l'interesse non resta della rata nulla che riduca il capitale; questo resta inalterato e l'ammortamento non incomincia mai. Se poi (3°) la rata è inferiore all'interesse periodico, il debito invece di diminuire *aumenta* della differenza $S\,r\,(1+r)^k - a$, dopo la prima rata, e più dopo le successive.

47. — La rata che si paga per estinguere un debito si può considerare, e spesse volte è effettivamente, divisa in due parti: una serve a pagare gli interessi maturati sul debito residuo dalla scadenza della rata precedente — *quota d'interessi* — la residua parte va a diminuzione del capitale — *quota di capitale.*

Indichiamo con α la quota di capitale.

Tra le quote capitali α_p ed α_{p+1} di due successive rate passa una certa relazione.

Sia costante la rata a. Se α_p è la quota di capitale della p^{ma} rata, l'interesse del capitale residuo durante il $(p+1)^{mo}$ periodo diminuirà della parte relativa al capitale ammortizzato $\alpha_p\, r$, e della nuova rata resterà disponibile per l'ammortamento in più sulla precedente la somma $\alpha_p\, r$. Quindi

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p + \alpha_p\, r = \alpha_p\,(1+r)$$

Le quote di capitale costituiscono dunque una progressione geometrica di ragione uguale al binomio d'interesse. La prima di esse è

$$\alpha_1 = a - S\,r\,(1+r)^k = \frac{S\,r\,(1+r)^{n+k}}{(1+r)^n - 1} - S\,r\,(1+r)^k =$$

$$= \frac{S\,r\,(1+r)^{n+k} - S\,(1+r)^{n+k} + S\,r\,(1+r)^k}{(1+r)^n - 1} = \frac{S\,r\,(1+r)^k}{(1+r)^n - 1}$$

cioè uguale alla rata, n termini della quale danno un montante pari al debito al principio dell'ammortamento. Inoltre.

$$\alpha_p = \alpha_g\,(1+r)^{p-g}$$

Quando il differimento è nullo

$$\alpha_1 = \frac{S\,r}{(1+r)^n - 1} = a\,(1+r)^{-n}$$

e sostituendo questo valore nella

$$\alpha_k = \alpha_1\,(1+r)^{k-1}$$

si ha

$$\alpha_k = a\,(1+r)^{k-(n+1)}$$

48. — Sia la rata variabile in progressione aritmetica con differenza d, ed a_p la p^{ma} e $a_p + d$ la successiva. Se la quota di capitale compresa in a_p era α_p l'interesse del capitale residuo per il periodo $(p+1)^{mo}$ diminuirà di $\alpha_p\, r$, e colla rata successiva sarà disponibile in più per l'ammortamento, questa somma $\alpha_p\, r$ e l'incremento della rata. Cioè:

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p + \alpha_p\, r + d = \alpha_p\,(1+r) + d.$$

Le rate siano ora in progressione geometrica di ragione q, la p^{ma} rata a_p. La successiva sarà $a_p\, q$ e l'aumento già disponibile per l'ammortamento

$$a_p\, q - a_p = a_p\,(q-1).$$

A questo bisognerà aggiungere l'interesse risparmiato sul capitale ammortizzato colla rata a_p, cioè $\alpha_p\, r$.

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p + \alpha_p\, r + a_p\,(q-1)$$

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p\,(1+r) + a_p\,(q-1).$$

49. — Contraendosi un prestito rimborsabile con rate, può essere necessario, o almeno conveniente, vedere come le successive rate si ripartiscono in quote d'interessi e quote di capitale, e come il debito si riduca via via, cioè come la rata *fa il servizio del prestito.* Si costruisce allora il cosidetto *Piano d'ammortamento.*

Sia ad es. un prestito di L. 40000, al 4 % annuo da rimborsarsi con cinque annualità costanti immediate.

La rata è data dalla formula

$$a = \frac{40000 \cdot 1{,}04^5 \cdot 0{,}04}{1{,}04^5 - 1} = 8985{,}084.$$

PIANO D'AMMORTAMENTO

Anni	Debito residuo	Riparto della rata $a = 8985{,}084$	
		Interessi 4 %	Quota capitale
1	40000,—	1600,—	7385,08
2	32614,92	1304,60	7680,48
3	24934,44	997,38	7987,70
4	16946,74	677,67	8307,21
5	8639,53	345,58	8639,50
	0,03		39999,97

Dal prospetto a fianco si può verificare la relazione che lega le successive quote di capitale.

1ª quota	7385,08
+ int. 4 %	295,40
2ª quota	7680,48
+ int. 4 %	307,22
3ª quota	7987,70

e così di seguito.

La relazione che passa tra le successive quote permette di controllare la costruzione del piano d'ammortamento prima

di averlo completato, calcolando un certo numero di quote capitali, per es. distanti tra loro di 5 periodi.

50. — Volendo determinare il *capitale residuo* dopo la scadenza di una data rata, per es. dopo pagata la p^{ma} si può fare in questo modo: Il montante del debito in quel momento sarebbe, astrazione fatta delle rate, $S(1+r)^{k+p}$ ed il montante delle rate pagate $a\,\dfrac{(1+r)^p-1}{r}$. Ogni rata è uguale ad

$$\frac{S\,r\,(1+r)^{n+k}}{(1+r)^n-1}$$

Si ha quindi

$$S_p = S(1+r)^{p+k} - \frac{S\,r\,(1+r)^{n+k}}{(1+r)^n-1}\cdot\frac{(1+r)^p-1}{r}$$

da cui

$$S_p = S(1+r)^k\left[(1+r)^p-(1+r)^n\,\frac{(1+r)^p-1}{(1+r)^n-1}\right]$$

$$S_p = S(1+r)^k\,\frac{(1+r)^n-(1+r)^p}{(1+r)^n-1}$$

51. — Allo stesso risultato si giunge togliendo da S la somma delle quote di capitale, che, come si è visto, costituiscono una progressione geometrica; oppure col procedimento dato alla fine dell'esercizio seguente.

Si può anche ragionare più generalmente così:

Le rate *ancora da pagare* comprendono il capitale debito residuo più i suoi interessi: se determiniamo il loro valore attuale *collo stesso tasso a cui esse sono calcolate*, per una nota proprietà dell'interesse composto, tale valore attuale comprenderà il solo *capitale*.

Siano p le rate pagate, quindi $n-p$ quelle ancora da pagare e $k=0$.

a) *Periodicità costanti:*

$$S_p = \frac{Sr\,(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\cdot\frac{(1+r)^{n-p}-1}{r\,(1+r)^{n-p}}$$

da cui con facili passaggi si ottiene la formula già data.

b) *Periodicità in progressione geometrica:*

Operando similmente

$$S_p = S\,\frac{(1+r)^n-(1+r)^p\,q^{n-p}}{(1+r)^n-q^n}$$

c) *Periodicità in progressione aritmetica:*

$$S_p = \left(S+\frac{n\,d}{r\,(1+r)^n}\right)\frac{(1+r)^n-(1+r)^p}{(1+r)^n-1} - \frac{(n-p)\,d}{r\,(1+r)^{n-p}}.$$

***Applicazione.** — Trovare il debito residuo dopo pagata la terza rata nell'esempio precedente.* Abbiamo $p=3$, $k=0$.

$$S_3 = 40000\;\frac{1{,}04^5-1{,}04^3}{1{,}04^5-1} = 16946{,}74.$$

Si può osservare che:

$$a_{p+1} = a - S_p\,r$$

$$\text{quindi}\quad S_p = \frac{a-a_{p+1}}{r}.$$

Nel nostro esempio le rate sono costanti, quindi

$$a_4 = a_1\,(1+r)^3 = a_1\,1{,}04^3$$

$$a_1 = a - Sr = 8985{,}084 - 40000\cdot 0{,}04 = 7385{,}084$$

$$a_4 = 7385{,}084\cdot 1{,}04^3 = 8307{,}21$$

$$S_3 = \frac{8985{,}08-8307{,}21}{0{,}04} = 16946{,}75,\quad \text{come sopra.}$$

52. — Si determina facilmente dopo quante rate il debito è ridotto ad $\dfrac{1}{k}$ di quello iniziale. Infatti, posto $S_p = \dfrac{S}{k}$

$$\frac{S}{k} = S(1+r)^k\;\frac{(1+r)^n-(1+r)^p}{(1+r)^n-1}$$

$$\text{da cui}\quad (1+r)^p = \frac{(1+r)^n\,[h(1+r)^k-1]+1}{h\,(1+r)^k}.$$

In particolare

$$\text{per}\quad h=2\quad\text{e}\quad k=0$$

$$(1+r)^p = \frac{(1+r)^n+1}{2}.$$

Può talvolta occorrere di sapere la *somma* (non il valore attuale) degli interessi da pagare per un prestito ammortizzabile a rate. Essa è evidentemente uguale alla *somma* delle rate da pagare diminuita del capitale debito in esse compreso, cioè del debito oggi residuo. Se p sono le rate già pagate, avremo:

a) periodicità costanti

$$x = (n-p)\,a - S_p$$

b) periodicità in progressione geometrica

$$x = a_{p+1}\ \frac{1 - q^{n-p}}{1 - q} - S_p$$

c) periodicità in progressione aritmetica

$$x = \frac{n - p}{2}[2\,a_{p+1} + (n - p - 1)\,d] - S_p\,.$$

53. *Osservazione.* — Nelle pratiche applicazioni sono frequenti i problemi di convertire un credito riscuotibile in una sola volta, in un certo numero di rate, o convertire una specie di periodicità in altra con diverso periodo o con diverso numero di rate, ecc.

I problemi non presentano nessuna difficoltà quando si stabilisca un'Epoca a cui riferire le diverse somme. La scelta dell'Epoca è indifferente nelle periodicità ad interesse composto quando il tasso da usare è uno solo, e solo si deve badare alla semplicità dei calcoli; nelle altre periodicità o nel caso di diversi tassi la scelta dell'Epoca non è arbitraria ma imposta dal problema.

CAPITOLO QUINTO.

SUI RIPARTI

54. — Il problema di riparto consiste nel determinare dei numeri di somma data che abbiano fra loro determinati rapporti come altri numeri dati.

Ricordiamo che due grandezze variabili si dicono tra loro *direttamente proporzionali* quando il quoziente o rapporto dei valori corrispondenti è costante, ed *inversamente proporzionali* quando il loro prodotto è costante.

Così se x ed a sono direttamente proporzionali, $\frac{x}{a}$ deve essere costante; se y ed s sono inversamente proporzionali $y\,s$ dev'essere costante.

Notiamo che se $y\,s = \text{cost}$ si ha pure $y : \frac{1}{s} = \text{cost}$ od anche $a : \frac{1}{y} = \text{cost}$, cioè che se due grandezze sono tra loro inversamente proporzionali, una qualunque di esse ed il reciproco dell'altra sono direttamente proporzionali.

Consideriamo quindi solo il caso della proporzionalità diretta.

Sia il numero S da dividere in 3 parti direttamente proporzionali ai numeri $a\ b\ c$. Indichiamo con x, y, z rispettivamente le incognite.

Per la definizione di proporzionalità diretta dev'essere

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

e siccome la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti come ogni antecedente sta al suo conseguente

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Ma $x + y + z = S$ quindi

$$\frac{S}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

da cui

$$x = \frac{S}{a+b+c} \cdot a$$

$$y = \frac{S}{a+b+c} \cdot b$$

$$z = \frac{S}{a+b+c} \cdot c$$

55. — È chiaro che trovati x, y, z essi non possono avere tra loro *altri rapporti* che non esistano già tra i numeri a, b, c. Perciò se si enunciasse il quesito: Trovare 3 numeri di somma S, che abbiano tra loro gli stessi rapporti che i numeri a, b, c, che i numeri r, s, t; una sola sarebbe la risposta: o i numeri $a\ b\ c$ sono ordinatamente e direttamente proporzionali ai numeri $r\ s\ t$, ed allora un solo e qualsiasi gruppo dato basta per la risoluzione del problema, oppure quella proporzionalità non esiste ed allora il problema è impossibile.

Nella pratica tuttavia si presentano problemi che sembrano identici al precedente e che si possono, con opportune interpretazioni caso per caso, riportare al problema tipico di riparto e quindi risolvere.

Un esempio chiarirà meglio la cosa: Si supponga di dover determinare l'interesse che spetta ad ogni capitale fra più dati, conoscendo il frutto totale, l'importo ed il tempo d'impiego di ogni capitale. Si può facilmente convenire che un capitale impiegato per un certo tempo dia diritto ad un frutto uguale a quello di un capitale doppio impiegato per metà tempo e così via. Possiamo allora sostituire ai capitali dati degli altri multipli di essi secondo i tempi rispettivi di impiego e supporre poi tutti i tempi uguali. Così si è riportato il problema a quello tipico.

Tutte le volte che è possibile sostituire ai vari gruppi di numeri, un gruppo solo, formato coi prodotti dei numeri corrispondenti di quelli, si dice che si fa il RIPARTO COMPOSTO.

Si ricordi che se le incognite devono essere inversamente proporzionali coi numeri di un gruppo, in quel prodotto entreranno i valori reciproci di questi numeri.

Il riparto composto non è sempre possibile. E questo in generale avviene quando i numeri di un gruppo indicano grandezze che dipendono (o sono funzioni concrete) di quelle misurate dai numeri di un altro gruppo. Per esempio: la popolazione di un Comune e l'importo delle entrate e spese sue. È vero che un Comune con popolazione doppia non ha un *bilancio* doppio di un altro, ma è certo che Comuni più popolosi hanno bilanci maggiori (parlando in generale). Ora se supponiamo due Comuni di cui uno per popolazione e bilancio doppio dell'altro e dobbiamo fare il riparto per es. d'una spesa tenendo conto della popolazione e del bilancio, vediamo che col riparto composto la parte del Comune maggiore è *quadrupla* di quella dell'altro. E questo è ingiusto, al Comune maggiore che è in tutto doppio dell'altro la ragione assegna spesa doppia soltanto. E noi potremmo idealmente suddividerlo in 2 che risulterebbero uguali al minore, e, fatto il riparto, assegnare al Comune grande *due* delle 3 parti uguali determinate.

Nei casi in questione, volendo *tener conto* di tutti i gruppi dati, si ricorre ad un ripiego.

Si divide S in tante parti uguali quanti sono i gruppi dati, ed ogni parte si ripartisce in proporzione dei numeri di un gruppo e si sommano i risultati parziali corrispondenti.

Se poi si vuole tener conto *in special modo* di uno o più gruppi si assegna ad ogni gruppo un coefficiente e si divide S non in parti uguali ma proporzionali a questi coefficienti. E poi ogni parte si suddivide secondo i numeri del gruppo corrispondente.

In questa forma il riparto si dice *complesso*.

In Italia la spesa per il Carcere Mandamentale si ripartisce fra i comuni del Mandamento in ragione diretta della popolazione e del tributo governativo per imposta fondiaria.

Non si può escludere che si presentino problemi di riparto più complicati, ma tutti devono potersi ridurre al caso tipico.

Esempi:

1° *Durante un viaggio marittimo si ebbe un'avaria comune di L. 430 mila, che, secondo l'art. 647 del Codice di Commercio, si deve ripartire proporzionalmente tra il carico e la metà della nave e del nolo, carico e nave al valore al porto di scaricamento, astrazione fatta dalle avarie particolari. Determinare il contributo del proprietario della nave, dell'armatore, dei caricatori.*

L'avaria sia così composta:

Danni alla nave L. 110.000 » al carico » 320.000	}	430.000
½ valore della nave	L.	1.700.000
½ nolo	»	120.000
Carico	»	970.000
		2.790.000

Riparto semplice diretto.

430000	:	2.790.000	=	0,15412186
0,15412186	·	1.200.000	=	262.007,16
»	·	120.000	=	18.494,63
»	·	970.000	=	149.498,21
				430.000,—

Così il proprietario della nave contribuisce per .	L.	262.007,16
— danni	»	110.000,—
paga netto	L.	152.007,16
l'armatore paga	»	18.494,63
	L.	170.501,79
i caricatori contribuiscono per	L.	149.498,21
— danni	»	320.000,—
devono avere	L.	170.501,79

2° *Il costo complessivo della lavorazione di 3 prodotti è di L. 32210, e le quantità ottenute sono rispettivamente 215; 132; 155. Calcolare il costo unitario di ciascun prodotto proporzionalmente ai rispettivi prezzi di mercato: 101; 95; 80.*

Riparto composto.

1° prodotto	prezzo	101	quantità	215	=	21.715
2° »	»	95	»	132	=	12.540
3° »	»	80	»	155	=	12.400
	valore compl. di mercato					46.655

32.210 : 46.655 = 0,6903866

0,6903866	·	101	=	costo 1° prodotto	69,72905	·	215	=	14.991,75
»	·	95	=	» 2° »	65,58673	·	132	=	8.657,45
»	·	80	=	» 3° »	55,23093	·	155	=	8.560,80
								costo	32.210,—

I costi unitari così ottenuti saranno, in pratica, opportunamente arrotondati, per es. in L. 69,73; 65,59; 55,23.

3° *Per eliminare la reciproca concorrenza due fabbriche sono venute ad un accordo, tra i cui patti è la ripartizione dell'utile complessivo in ragione complessa del capitale, della produzione e della vendita delle singole fabbriche*

I dati sono:			
	Capitale	12 milioni	8 milioni
	Produzione	180 mila	140 mila
	Vendita	200 mila	160 mila
	Utile	3 milioni	1,8 milioni
		4,8 milioni	

4,8 : 3 = 1,6 milioni.

Riparto in rag. del cap. $\frac{1,6}{12+8}=0,08$	· 12 = 960.000	· 8 = 640.000
Rip. in rag. della prod. $\frac{1,6}{18+14}=0,05$	· 18 = 900.000	· 14 = 700.000
Rip. in rag. della vend. $\frac{1,6}{20+16}=0,04^4/_0$	· 20 = 888.889	· 16 = 711.111
Quote di utile	1ª 2.748.889	2ª 2.051.111
	4.800.000	

E la prima fabbrica darà alla seconda 3.000.000 — 2.749.889 = 251.111.

CAPITOLO SESTO.

DELLA REGOLA CATENARIA

56. — Se un problema è risolubile mediante più proporzioni dove — 1°) l'incognita di una è termine noto nella successiva e, 2°) in ogni proporzione l'incognita è direttamente proporzionale alle grandezze date, si può usare una regola *pratica* di facile e sollecita applicazione.

Le proporzioni risolventi il problema siano le seguenti, dove gli indici delle lettere indicano la specie delle grandezze che i numeri corrispondenti misurano.

$$a'_A : a_A = b_B : y_B$$
$$b'_B : y_B = c_C : z_C$$
$$c'_C : z_C = d_D : x_D$$

Permutando i medi

$$a'_A : b_B = a_A : y_B$$
$$b'_B : c_C = y_B : z_C$$
$$c'_C : d_D = z_C : x_D$$

Moltiplicando termine con termine

$$a'_A b'_B c'_C : b_B c_C d_D = a_A y_B z_C : y_B z_C x_D$$

[1] $$a'_A b'_B c'_C : b_B c_C d_D = a_A : x_D$$

da cui x_D. Essendo [2] $x_D a'_A b'_B c'_C = a_A b_B c_C d_D$ si usa disporre dati ed incognita nel seguente modo

[3]

x_D	a_A
a'_A	b_B
b'_B	c_C
c'_C	d_D

dove si può osservare:

1° Il primo antecedente è l'incognita.

2° Il primo conseguente è la grandezza di cui si cerca l'equivalente.

3° Ogni antecedente è omogeneo col conseguente che lo precede.

4° L'ultimo conseguente è omogeneo coll'incognita.

5° L'incognita si ottiene dividendo il prodotto dei conseguenti per il prodotto degli antecedenti.

Queste osservazioni costituiscono la cosidetta *Regola Catenaria* o *Congiunta*.

57. — La condizione 2) a cui deve soddisfare il problema è essenziale per l'applicabilità della *Regola*. Infatti in una proporzione, per es. la 2ª, siavi un caso di proporzionalità inversa. Si potrà scrivere in uno di questi modi:

$$c_C : b'_B = y_B : x_C$$

oppure

$$b'_B : c_C = x_C : y_B$$

$$\frac{1}{b'_B} : \frac{1}{c_C} = y_B : x_C$$

Scrivendo nel *primo* modo la [1] [2] [3] diventano rispettivamente

[1]' $$a'_A c_C c'_C : b_B b'_B d_D = a_A : x_D$$

[2]' $$x_D a'_A c_C c'_C = a_A b_B b'_B d_D$$

[3]'

x_D	a_A
a'_A	b_B
c_C	b'_B
c'_C	d_D

dove la Regola (n. 3°) non è osservata.

Scrivendo nel *secondo* modo si ha analogamente

[1]'' $$a'_A b'_B c'_C : b_B c_C d_D = a_A x^2_C : y^2_B x_D$$

dove non si possono eliminare le incognite ausiliarie.

Scrivendo nel *terzo* modo si ha analogamente

$$[1]''' \qquad a'_A \frac{1}{b'_B} c'_C : b_B \frac{1}{c_C} d_D = a_A : x_D$$

$$[2]''' \qquad x_D a'_A \frac{1}{b'_B} c'_C = a_A b_B \frac{1}{c_C} d_D$$

$$[3]''' \qquad \begin{array}{c|c} x_D & a_A \\ a'_A & b_B \\ \frac{1}{b'_B} & \frac{1}{c_C} \\ c'_C & d_D \end{array}$$

Neppure qui la Regola (n. 3°) è osservata, perchè i valori reciproci di numeri concreti misurano grandezze diverse da quelle dei numeri dati. Per es. il reciproco del numero degli operai che fanno un dato lavoro in un giorno esprime — se vi è proporzionalità — la parte di quel lavoro fatto nello stesso tempo da un solo operaio. Dunque b_B e c'_C non sono rispettivamente omogenei con $\frac{1}{b'_B}$ ed $\frac{1}{c_C}$, come dovrebbero essere per applicare la Regola.

58. *Osservazione.* — Per la [2] il prodotto degli antecedenti è uguale a quello dei conseguenti una volta che si sia trovata l'incognita; quindi un termine qualunque della [3] è uguale al prodotto dei termini opposti diviso per quello dei termini rimanenti dalla sua stessa parte. Questa osservazione può essere utile per fare sollecitamente la [3] *senza cominciare con l'incognita*, quando si tratti di una incognita non consueta per un dato tipo di calcoli.

CAPITOLO SETTIMO.

SULLE MISURE

59. — Il pregio che si attribuisce alle ricchezze varia in ragione della loro *quantità*. Occorre perciò per ogni grandezza considerata nelle cose una *unità* od un *sistema di unità di misura*.

In linea di principio la loro scelta è arbitraria ed ognuno potrebbe servirsi di misure speciali e cambiarle a proprio capriccio, ma evidenti ragioni di convenienza consigliano la uniformità nello spazio delle unità di misura e la loro fissità nel tempo. A questo provvidero grossolanamente gli antichi scegliendo come unità di misura: parti del corpo umano, per es. piede, cubito, braccio, palmo, pollice; semi di piante: orzo, grano, carubbo (carato); o quantità facilmente trasportabili, some, ecc.; alcune molto opportune per le cose a cui applicabili e di facile, benchè solo approssimativa, riproduzione. Di fronte a questi pregi stavano degli inconvenienti. L'uniformità nello spazio era piccola perchè unità dello stesso nome avevano nei vari paesi dimensioni differenti. Il legame tra multipli e sottomultipli era svariatissimo e complicato: essendo praticato il calcolo mentale più dello scritto si erano fissati come rapporti tra multipli e sottomultipli numeri di facile calcolo cioè ricchi, relativamente, di divisori: 2, 4, 6, 12, 20, 24, 60. Tali rapporti non sono i più convenienti per il calcolo scritto, perchè, essendo decimale il sistema di numerazione, le quantità risultano espresse in numeri complessi. Per togliere

tale inconveniente occorre prendere come rapporto tra ogni unità di misura ed i suoi multipli e sottomultipli, il numero base del sistema di numerazione o le sue potenze intere, perchè così la *posizione* relativa delle cifre di un numero esprimente una misura dà il valore di esse senza bisogno di denominatori o di indicazioni della specie loro.

Si imponeva pertanto un *sistema decimale.*

Da tempo auspicato dagli studiosi, esso ebbe la sua prima sanzione legislativa solamente dalla Convenzione Francese, ma in poco più di un secolo si è quasi ovunque diffuso. Rimangono ancora refrattarii alla sua adozione i paesi Anglo-Sassoni: Stati Uniti ed Inghilterra; le colonie di questa sembrano prossime ad abbandonare le vecchie misure.

Il sistema votato dalla Convenzione è più organico di qualunque altro, perchè tutte le unità dipendono da quella di lunghezza, chiamata per antonomasia *metro*, e che si voleva fosse la decimilionesima parte del quarto di meridiano terrestre (1). Il legame tra le misure di diverse specie è vantaggioso, permette il passaggio dalle lunghezze alle superfici ai volumi, e dai volumi ai pesi, avendo adoperato per fissare l'unità di peso l'acqua che serve pure per esprimere i pesi specifici.

60. — Altre unità di misura vi sono all'infuori del sistema metrico decimale, nella stessa pratica commerciale, per il peso delle pietre preziose, la tenuità dei filati ed altre.

(1) Niente ci assicura che il *metro* così definito resti realmente fisso, anzi è probabile, col volgere dei secoli, il contrario. La definizione data, che è l'usuale, non è, nemmeno ora corretta. Per errori negli strumenti non si potè ottenere coll'assoluta precisione la lunghezza del meridiano: più esatta sarebbe, sia per il metro che per le unità derivate una definizione che ricordasse i prototipi di platino iridiato fabbricati allora da una commissione di scienziati e conservati a Parigi al « Bureau des Longitudes ». La scelta poi della decimilionesima parte, piuttosto che un'altra qualunque, del quarto di meridiano era, almeno allora, opportuna, perchè era progettata pure la divisione centesimale del *quadrante* che sarebbe risultato di 100 gradi, da 100 primi, da 100 secondi. Si sarebbero avute così, per le latitudini alla superficie del globo, le corrispondenze seguenti: km. $100 = 1^{\circ}$; km. $1 = 1'$; m. $10 = 1''$ (trascurando lo schiacciamento polare).

Si è cercato nondimeno di metterle in relazione semplice con quelle del sistema metrico, così abbiamo per le pietre preziose il *carato metrico* (= 2 dg), per i filati il *titolo* decimale, ecc.

Non si può pensare ad una misura diretta dello spessore di un filato, per evidenti ragioni.

Nella pratica due sono le vie indirette seguite.

1° Si prende un filo di lunghezza fissa e se ne esprime il peso con unità di peso arbitrarie: per es. di mmg. 50.

2° Si prende un peso determinato di filato e se ne esprime la lunghezza con unità convenzionali, per es. matasse di m. 100.

Si vede facilmente che un filato, col primo modo di misurazione avrà uno spessore tanto maggiore quanto più grande sarà il suo *numero* o *titolo*; l'inverso accade colla seconda *numerazione.*

Per la *seta* si usa in Svizzera ed in Italia il *titolo ufficiale*, indicando quanti *denari* da mmg. 50 pesa un filo di m. 450. Il *titolo internazionale* considera invece un filo di m. 500.

Per i filati di *lana cotone* e *lino* è diffusa la *numerazione metrica* che esprime quante matasse da m. 1000 pesano kg. 1.

Nei paesi Anglo-Sassoni la pratica è diversa:

Si indicano quante matasse pesano una libbra avoir du poids ma le matasse sono lunghe yarde 560 per la lana, yd. 840 per il cotone, e yd. 300 per il lino.

In Francia per il cotone si indicano quante matasse da m. 1000 pesano kg. 0,5.

61. — Principali unità di misura non appartenenti al S. M. D. (1).

Germania.

Pfund (libbra) = kg. 0,5; *Zentner* = kg. 50; *Doppelzentner* (*dz*) = 1 q.

Inghilterra.

Misure di lunghezza:

yard (*yd*) = *m.* 0,9143835. Sottomultipli: 3 *feet* (*ft*) piedi; 1 *ft* = 12 *inches* (*in*) pollici; 4 *ft* 2 *in* = 4′ 2″.

Misure di capacità:

1) per liquidi e solidi

(Imperial) *Gallon* (*gall*) = *l.* 4,53596 = 4 *quarts* (*qts*) = volume di 10 libs. a. d. p. di acqua.

(Imperial) *Bushel* (*bsh*) = *hl* 0,36368 = 4 *pecks* (*pks*); 1 *pk* = 2 *galls.*

(1) Recente e conveniente sotto varii aspetti è la pubblicazione dell'Istituto Internazionale d'Agricoltura: *Recueil de coefficients pour la conversion des poids, mesures et monnayes au Système métrique decimal.*

2) per i solidi
Quarter (*qr*) = *hl* 2,90942 = 8 *bsh.*
Sack (*sk*) = 3 *bsh.*
Misure di peso:
1) Avoirdupois weight (per merci comuni)
Pound (Imperial) Avoirdupois, libbra (*lb*) = kg. 0,45359 = 7000 grani (*grs*). Sottomultipli: 16 once (*oz*); 1 *oz* = 16 *drachms* (*dr*, o *drch*) per le conversioni è comoda la relazione lb 441 = kg. 200.
14 *lbs* = 1 *stone* (*stn*), 2 *stns* = 1 *quarter* (*qr*).
4 *qrs* = 1 *Hundredweight* o *Centweight* (*Cwt*) = q. 0,50802 = 112 *lbs.*
2240 *lbs* = 20 *Cwts* = 1 *Ton* (*T*) o *Long Ton* = q. 10,16047 spesso, nel commercio marittimo, conteggiato per kg. 1015.
2) Troy weight (metalli preziosi ed usi scientifici)
Troy pound, libbra Troy, (*lb. t.*) = kg. 0,37323 = 5760 *grs* (quind 175 *lb. t.* = 144 *lb a. d. p*).
Sottomultipli 12 *oz*; 1 *oz* = 20 *pennyweights* (*dwts*), 1 *dwt* = 24 *grs.*
In *Australia* ed in *Canadà* si usa il *Cental* = 100 *lbs* = q. 0,45359
In *Canadà* anche *Short Ton* = 2000 *lbs* = q. 9,07185.
In *India* oltre alle misure inglesi; varie specie di *Mound*, di diverso numero di libbre secondo le regioni ed il *Candy* diverso secondo le merci.

Stati Uniti d'America.

Misure di lunghezza: inglesi.
Misure di capacità:
1) per i solidi
U. S. Bushel (od anche *Winchester Bsh*) = hl. 0,35239.
U. S. Bsh 33 = 32 Imp. Bsh (circa).
2) per i liquidi
U. S. liquid Gallon = l. 3,78543 = 4 U. S. liquid quarts.
Misure di peso:
1) A. d. p. weight: inglesi con le segg. varianti
1 *qr* = 25 *lbs; Cental* e *Short Ton* usate di preferenza.

Russia.

Misure di lunghezza:
Piede = m. 0,30479 (come l'inglese); *Arscine* = m. 0,71119.
Misure di capacità:
1) per i solidi
Cetverik = hl. 0,26238; 4 *Cetverik* = 1 *osmina.*
2 *osmine* = 1 *Cetvert* = hl. 2,09902.
2) per i liquidi
Vedro = l. 12,29894.
Misure di peso:
Funt (libbra) = kg. 0,40951 = 96 *Solotnik* da 96 *Doli.*
Pud = 40 libbre = kg. 16,38046.
10 pudi = 1 *Berkovez*, 10 Berkovez = 1 Tonn.

Giappone.

Misure di lunghezza:
Shaku = m. 0,30303.
Misure di capacità:
Kokou = hl. 1,80391 = 10 *to* = 100 *shô.*
Misure di peso:
Pikul = kg. 60 = 100 *Kin.*
Kwan = kg. 3,75.

Cina.

Misure di lunghezza:
Ci = m. 0,32.
Misure di peso:
Liang o *Tael* = g. 37,783.
16 Tael = 1 Catty, 100 Catty = 1 *Pikul* = 60,453 (nel commercio però varia secondo i prodotti); per la seta nei porti commercianti con l'Europa si usa la *Balla* di 80 Catty.

Brasile.

Misure di capacità:
Alqueire diverso secondo gli Stati; sull'Oceano hl. 0,40.
Misure di peso:
Arroba = 15 kg. Si usa inoltre la *Sacca* che è
per il caffè di kg. 60
» lo zucchero » 50
» il cotone » 80

62. — Misure espresse con una certa unità si possono facilmente esprimere con altre, quando si conosca il rapporto diretto tra le dimensioni delle unità di misura, o quelli fra esse ed un'altra. Per risparmiare i calcoli possono essere di grande utilità scale grafiche con doppia o tripla graduazione come si usa con certi strumenti di misura: per es. regoli graduati in metri e frazioni, ed in yarde inglesi e sottomultipli.
Dovendo fare molte riduzioni di certe misure in altre, conviene prepararsi, partendo da un rapporto con molte cifre decimali, una tavola indicante il valore, in nuove unità di 1, 2... 9 di quelle da convertire; così il calcolo si riduce ad una addizione.
Per es.

Valore in metri.

di	1	2	3	4	5	6	7	8	9
arde	0,9143835	1,828767	2,7431505	3,657534	4,5719175	5,486301	6,4006845	7,315068	8,2294415
iedi	0,304795	0,609589							
ollici	0,025400	0,050799	0,076199	0,101598	0,126998	0,152397	0,177797	0,203196	0,228596

Così per ridurre in m. *yds* 65, 2 *f*, 8 *in* (approssimazione a meno di 1 cm.):

yds	60	m.	54,8630
	5	»	4,5719
f	2	»	0,6096
in	8	»	0,2032
		m.	60,2477 cioè m. 60,25.

Per ridurre *m* in *yds* si può fare una tavola inversa che dia il valore in *yds* e sottomultipli di 1, 2, 3... 9 m.; ma può servire benissimo la tavola precedente.

Si riducano in *yds* m. 60,25.

Col calcolo ordinario

60,2500 : 0,9144 = 65 . 2 . 8
54864
53860
45720
8140 × 3
24420
18288
6132 × 12
12264
6132
73584
73152
432

Coll'uso della tavola

	60,25	
60 *yds*	54,8630	1ª linea, col. 6
	5,3870	
5 *yds*	4,5719	» » » 5
	0,8151	
2 *f*	0,6096	2ª » » 2
	0,2055	
8 *in*	0,2032	3ª » » 8
	23	

Nelle operazioni di moltiplicazione e di divisione su numeri complessi, il modo più conveniente per evitare complicazioni è quello di ridurli in decimali di una unità a piacere, prendendo il numero di decimali necessario per assicurare al risultato l'approssimazione richiesta, e ridurre il risultato, se occorre, in numeri complessi.

Es. Ridurre in decimali di ton: 5 *cwts*, 2 *qrs*, 10 *lbs*, 8 *ox*.

8 *ox* : 16 = 0,5 *lbs*	in totale	10,5 *lbs*
10,5 *lbs* : 28 =		
: 7 = 1,5		
1,5 : 4 = 0,375 *qrs*	»	2,375 *qrs*
2,375 *qrs* : 4 = 0,59375 *cwts*	»	5, 59375 *cwts*
5,59375 *cwts* : 20 = 0,2796875 *tons*	»	**0,2796875** *tons*

Es. Ridurre in numeri complessi 0,2796875 *tons.*

tons	**0**,2796875	
	× 20	
cwts	**5**,59375	
	× 4	
qrs	**2**,375	
	× 28	
	3000	
	750	
lbs	**10**,5	
	×16	
	30	
	5	
ox	**8**	0 *tons*, 5 *cwts*, 2 *qrs*, 10 *lbs*, 8 *ox*.

Quando questi calcoli sono frequenti si possono predisporre appositi prontuari. Per es. volendo ridurre *lbs*, *sts*, *qrs* in decimali di *cwts*.

Unità	1	2	3	4	5	6	7	8	9
lbs	. 00893	. 01786	. 02679	. 03572	. 04465	. 05358	. 0625	. 07143	. 08038
stns	. 125								
qrs	. 25	. 5	. 75						

Es. Esprimere in decimali di cwts: 2 *qrs*, 1 *stn*, 8 *lbs.*

2 *qrs.*	5
1 *stn*	. 125
8 *lbs*	. 07143
	0,69643 *cwts.*

Per il calcolo inverso, vedi es. delle conversioni.

Trovare il rapporto fra 1 Doli russo ed 1 gr inglese, conoscendo i loro rapporti col grammo.

grs x	1 *Doli*
Doli 96	**1** Solotnik
Sol. 96	409,51 g. (1 lb russa)
(1 lb T.) g 373,23	5760 *grs*
x = grs 0,831304	

Convertire in titolo decimale il titolo inglese 30 per filati di cotone (v. nota precedente).

matassine metriche *x*	1000 g.
g. 453,59	30 mat. ingl. (titolo dato)
m. ingl. 1	840 yds
yds 1	0,9144 m.
m. 1000	**1** mat. metrica
x = 50,8	

Convertire in titolo inglese il titolo francese 42 per la lana.

mat. ingl. x	1 lb adp.
lb adp. 1	453,59 g.
g. 1000	[42] 21 mat. metr. (titolo dato)
mat. m. 1	1000 m.
m. 0,9144	1 yd
yds 280 [560]	1 mat. ingl.

$x = 29{,}55$

Osservazione. — Nelle due precedenti congiunte i dati variabili caso per caso si riducono ad *1* cioè al *titolo* da convertire. Sostituendolo con un simbolo e risolvendo la congiunta si trova il *coefficiente fisso* per cui moltiplicare ogni titolo simile da convertire, senza dover ripetere ogni volta l'intera congiunta.

CAPITOLO OTTAVO

CALCOLI RELATIVI ALLE MESCOLANZE

63. — Corpi fisicamente affini ma di qualità o di usi tecnici diversi possono essere naturalmente od artificialmente mescolati.

Svariate possono essere le ragioni della mescolanza artificiale: può convenire di riunire diverse qualità di una stessa merce in modo che il *miscuglio* abbia alcune caratteristiche atte a renderlo più accetto al consumatore, o più adatto all'uso cui è destinato o più a buon mercato; può farsi per fine di lucro mescolando alla cosa genuina corpi di pregio inferiore od inerti e difficilmente rintracciabili, come olio di cotone con olio d'oliva. Il miscuglio può essere fatto con metalli e consideriamo qui solo il caso dell'oro e dell'argento: l'aggiunta di metalli inferiori aumenta la loro durezza ed il loro *volume specifico* [1] senza mutarne, entro certi limiti, le qualità esteriori.

Altri esempi: alcool ed acqua, idrocarburi molto volatili con altri difficilmente gassificabili, anidride fosforica solubile e fosfati non solubili (concimi).

Nel confronto e nell'apprezzamento di simili corpi non basta tener conto della loro *quantità*, occorre considerare la

[1] Aumento di volume notevole, specialmente per l'oro col rame, data la grande differenza tra i pesi specifici.

loro *bontà*. Questa si esprime col *rapporto numerico tra il peso dell'elemento utile* (fino, attivo, ecc.) *ed il peso di tutto il corpo* (grezzo, lordo, ecc.). Questo rapporto si dice *titolo*, (*gradazione* per gli alcools) ed è evidentemente sempre $\leqq 1$.

Esempi: Se si dice che un oggetto d'oro è al *titolo* di 0,9 significa che si ottiene 0,9 dividendo il peso dell'oro puro per il peso dell'oggetto. Così se si dice che un certo alcool è a 95° significa che su 100 parti in peso del liquido 95 sono di alcool puro.

Si potrebbe analogamente trattare il caso delle materie prime (grani, semi oleosi, ecc.) per le quali si concede sempre una *tara* (deduzione) *percentuale* dal peso totale (*lordo*) per corpi estranei. Esempio: Se la tara fosse del 4 % si potrebbe dire che quella merce è al titolo di 0,96.

64. — In Inghilterra si usa ancora un vecchio modo di indicare il titolo dei metalli preziosi. Si indica la differenza fra il titolo del metallo ed un titolo tipo o *Standard* facendola precedere dalle lettere *B* (Better = migliore) *M* (More = più) o *W* (Worse = peggiore).

I titoli Standard sono:

Per l'oro $\frac{22}{24}$, 22 carati, ognuno divisibile in 4 grani.

Per l'argento $\frac{222}{240}$, 222 denari di libbra troy, divisibili quindi in 24 grs.

Se per una pasta d'oro è detto: rep. (1) *W* 2 vuol dire che il titolo è

$$\frac{22-2}{24}=\frac{20}{24}.$$

Se per un pezzo d'argento è: rep *B* 8 vuol dire che il titolo è

$$\frac{222+8}{240}=\frac{230}{240}.$$

Per convertire il titolo inglese in decimale basta convertire in decimale la frazione ordinaria che lo esprime:

$$\text{Oro:}\quad \text{rep } W\ 4=\frac{22-4}{24}=\frac{18}{24}=0{,}750.$$

$$\text{Argento:}\quad \text{rep } W\ 30=\frac{222-30}{240}=\frac{192}{240}=0{,}800.$$

Per convertire in titolo inglese un titolo decimale basta moltiplicarlo per 24 o 240 e confrontarlo collo Standard corrispondente. Infatti, indicando con t e t_1 due titoli decimali, rispettivamente per l'oro e per l'argento, devesi avere $t=\frac{x}{24}$, $t_1=\frac{x_1}{240}$ da cui $x=24\,t$ e $x_1=240\,t_1$.

(1) Rep = Report (differenza).

Esempio: *Convertire in titolo inglese 0,900 per l'oro e 0,835 per l'argento.*

$$0{,}9\cdot 24=21{,}6=21 \text{ car } 2{,}4 \text{ grs}=\text{rep } W\,0\cdot 1{,}6$$
$$0{,}835\cdot 240=200{,}4=200 \text{ dwts } 9{,}6 \text{ grs}=\text{rep } W\ 21\cdot 14{,}4.$$

La Banca d'Inghilterra usa il titolo decimale.
Anche in Russia vi hanno titoli diversi dai decimali.

65. — Indicando con t il titolo, con q la quantità del miscuglio, con f il fino si ha:

$$t=\frac{f}{q}\ ,\quad f=q\cdot t\ ;\quad q=\frac{f}{t}.$$

Esempio: *Un oggetto d'oro pesa gr. 20 e contiene g. 15 di fino:*

$$t=\frac{15}{20}=0{,}75$$

Una moneta d'argento pesa gr. 25 ed è al titolo 0,900; fino $= 25\cdot 0{,}9=$ g. 22,5

Una moneta d'argento contiene 165 grs di fino ed è al titolo W 2: peserà

$$165:\frac{220}{240}\text{ grs}=180\text{ grs}.$$

***A quanti grammi al titolo di 0,9 sono equivalenti** 27 oz d'oro rep W 4?*

$$\text{rep W } 4=\frac{18}{24}$$

Si convertono le oz in g,

$$27\cdot\frac{373{,}24}{12};$$

se ne trova il fino,

$$27\,\frac{373{,}24}{12}\cdot\frac{18}{24};$$

si trova il grezzo a 0,9,

$$27\,\frac{373{,}24}{12}\cdot\frac{18}{24}\cdot\frac{10}{9}=\frac{373{,}24\cdot 3\cdot 10}{4\cdot 4}=699{,}82$$

oppure colla catenaria,

g (0,9) x	[27] 3 oz $\left(\frac{18}{24}\right)$
oz ($^{18}/_{24}$) [24] 4	[18] [3] 1 oz fino
oz (fino) [12] 4	373,24 g fino
g fino [9] 1	10 g grezzo (0,9)

$$x = \frac{373{,}24 \cdot 3 \cdot 10}{4 \cdot 4} = g\ 699{,}82$$

A quante oz St equivalgono g. 400 d'argento a 0,8?
Si convertono i g in oz,

$$400\ \frac{12}{373{,}24}$$

si trova il fino,

$$400 \cdot \frac{12}{373{,}24} \cdot 0{,}8$$

si trova il grezzo al titolo $\frac{222}{240}$,

$$400\ \frac{12}{373{,}24} \cdot 0{,}8 \cdot \frac{240}{222} = \frac{400 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12}{373{,}24 \cdot 111} = 11 \text{ oz } 2 \text{ dwts } 11 \text{ grs}$$

oppure colla catenaria

oz (St) x	400 g (0,8)
g (0,8) [10] 1	8 g fino
g fino 373,24	12 oz fino
oz fino [222] 111	[240] [120] 12 oz (St)

$$x = \frac{8 \cdot 400 \cdot 12 \cdot 12}{373{,}24 \cdot 111}\ 11 \text{ oz } 2 \text{ dwts } 11 \text{ grs}$$

66. *Questioni sui miscugli.* — Sono due: 1ª. Date le *quantità* ed i *prezzi* o *titoli* relativi trovare il prezzo unitario del miscuglio od il suo titolo (*titolo o prezzo medio od adequato o media ponderata*). 2ª. Volendosi ottenere con qualità di prezzi o titoli dati un miscuglio di prezzo o titolo medio fissato, trovare le quantità da mescolare.

Essendo $q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_n$ le quantità (pesi) date ed i prezzi unitari o titoli relativi $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n$ indicheremo con T il prezzo o titolo medio. La quantità totale dopo il miscuglio sarà $q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$; il costo od il fino complessivo sarà la somma dei costi o fini dei componenti, cioè

$$q_1 t_1 + q_2 t_2 + \ldots + q_n t_n$$

ed il costo o titolo medio sarà

$$T = \frac{q_1 t_1 + q_2 t_2 + \ldots + q_n t_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}$$

Se $q_1 = q_2 = \ldots = q_n$, si ha $T = (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) : n$ cioè la media aritmetica dei prezzi o titoli dati. Uno dei t può essere *nullo*, per es. se corrisponde ad un corpo di costo zero o tutto grezzo. (Se l'unità di misura non è di peso la quantità del miscuglio può essere diversa da $q_1 + \ldots + q_n$).

Esempi. — 1°. Si mescola del grano proveniente da diverse partite, come segue: q.li 70 da L. 35, q.li 43 da L. 34,50 e q.li 10 da L. 33,75. Trovare il prezzo medio del grano mescolato.

$$T = \frac{35.70 + 34{,}5 \cdot 43 + 33{,}75 \cdot 10}{70 + 43 + 10} = \frac{4271}{123} = 34{,}7236$$

2°. Si fondono g. 20 d'argento a 0,900 e gr. 2,5 di rame. Il titolo del metallo fuso sarà

$$T = \frac{20 \cdot 0{,}9 + 2{,}5 \cdot 0}{20 + 2{,}5} = \frac{18}{22{,}5} = 0{,}8$$

3°. Si fondono 12 oz d'oro Standard con 8 oz d'oro rep W 10. Il titolo nuovo sarà

$$\text{rep } W\ 10 = \frac{12}{24}$$

$$T = \frac{12 \cdot \frac{22}{24} + 8 \cdot \frac{12}{24}}{12 + 8} = \frac{18}{24} = W\ 4$$

67. — La formula

$$T = \frac{q_1 t_1 + q_2 t_2 + \ldots + q_h t_h}{q_1 + q_2 + \ldots + q_h}$$

esprime la condizione a cui deve soddisfare T anche nella seconda questione. Da essa si ha

$$T(q_1 + q_2 + \ldots + q_h) = q_1 t_1 + q_2 t_2 + \ldots + q_h t_h$$

e raccogliendo le incognite

$$(t_1 - T)\, q_1 + (t_2 - T)\, q_2 + \ldots + (t_h - T)\, q_h = 0$$

Esclusi, per la natura del problema, i valori negativi delle incognite, perchè sia possibile l'equazione precedente occorre

che le differenze $t - T$ non siano tutte dello stesso segno, cioè che vi siano dei coefficienti minori ed altri maggiori di T. Distinguiamo con un apice i simboli relativi ai coefficienti minori di T potremo scrivere

$$(t_1 - T)\,q_1 + (t_2 - T)\,q_2 + \ldots + (t_n - T)\,q_n + \\ + (t'_1 - T)\,q'_1 + \ldots + (t'_n - T)\,q'_{n'} = 0$$

od anche

$$(t_1 - T)\,q_1 - (t_2 + T)\,q_2 + \ldots + (t_n - T)\,q_n = \\ = (T - t'_1)\,q'_1 + (T - t'_2)\,q'_2 + \ldots + (T - t'_{n'})\,q'_{n'}$$

Questa è l'equazione fondamentale del miscuglio.

Essa contiene $n + n'$ incognite, sicchè il problema è indeterminato e possiamo avere infinite soluzioni, anche limitandoci a quelle positive che sole soddisfano il problema.

Si ponga la condizione che le quantità dei componenti di pregio maggiore siano uguali tra loro, e così quelle di pregio inferiore, cioè si faccia

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = Q \\ q'_1 = q'_2 = \quad = q'_{n'} = Q'$$

L'equazione generale diventa

$$Q\,[t_1 - T + t_2 - T + \ldots + t_n - T] = \\ = Q'\,[T - t'_1 + T - t'_2 + \ldots + T - t'_{n'}]$$

ed indicando con S la somma dei coefficienti superiori e con S' quella degli inferiori

$$Q\,(S - n\,T) = Q'\,(n'\,T - S')$$

che si può scrivere

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{S - n\,T}{n'\,T - S'}$$

Dunque sono soluzioni del problema

$$a) \begin{cases} Q' = (S - n\,T)\,k \\ Q = (n'\,T - S')\,k \end{cases}$$

dove k è un numero qualunque. Per $k = 1$

$$b) \begin{cases} Q' = S - n\,T \\ Q = n'\,T - S' \end{cases}$$

La somma dei prezzi (o titoli) superiori, diminuita di tante volte il prezzo (o titolo) medio quanti essi sono, dà la quantità da prendere di ogni specie inferiore, e reciprocamente.

Applicazione. — Si hanno da mescolare merci da L. 48; 47; 45; 38; 35; *e il prezzo medio deve essere 40.* Quindi $m = 3$; $n = 2$.

		Prova
48	7	L. 336
47	7	» 329
45	7	» 315
140 − 3 · 40 = 20 (Q')		
38	20	» 760
35	20	» 700
2 · 40 − 73 = 7 (Q)	61 · 40 (T) = 2440	

Se $m = n = 1$, cioè le qualità da mescolare sono 2, le a) e b) diventano

$$a') \begin{cases} Q' = (t - T)\,k \\ Q = (T - t')\,k \end{cases} \qquad b') \begin{cases} Q' = t - T \\ Q = T - t' \end{cases}$$

ed il calcolo si può disporre come segue (*differenze in croce*)

$$\begin{array}{ccc} t_1 & & T - t'_1 \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & T & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ t'_1 & & t_1 - T \end{array}$$

Applicazioni.

1°. *Si vuole ottenere oro a diciotto carati* (18/24) *con oro a 16 e 21 carati.*

			Prova
$21/_{24}$	$2/_{24}$	2	fino $42/_{24}$
$18/_{24}$			
$16/_{24}$	$3/_{24}$	3	» $48/_{24}$
		5	$18/_{24}$ (T) = $90/_{24}$

(Dall'esempio si vede che, quando i titoli sono ugualmente espressi, la considerazione dei denominatori è, sia per il miscuglio che per la prova, *indifferente*).

2°. *Si vuole della farina a L. 38 mescolandone altre a 42 e 37.*

			Prova
42		1	L. 42
	38		
37		4	» 148
		$5 \cdot 38\,(T) =$	L. 190

68. — Non ponendo la detta condizione, possiamo trovare delle soluzioni positive della equazione fondamentale, scomponendola in un sistema di equazioni binarie, scegliendo un termine nel primo e l'altro nel secondo membro della equazione generale. Le differenti equazioni possibili sono in numero di $n\,n'$ potendo uno qualunque degli n monomi del primo membro essere preso con uno qualunque degli n' monomi dell'altro.

Sommando per ogni incognita i valori di essa trovati nelle varie equazioni binarie scelte, si ha un sistema di radici della equazione generale. Il numero delle equazioni binarie è indeterminato ma non essendo permessi dal problema valori nulli per nessuna incognita, ognuna di esse deve nelle equazioni parziali figurare *almeno una volta*, ed il numero delle equazioni *necessarie* sarà dato dal maggiore dei due numeri n ed n'.

Così se l'equazione data fosse

$$(t' - T)\,x + (t_2 - T)\,y + (t_3 - T)\,z = (T - t_1')\,v + (T - t_2')\,w$$

abbiamo 6 equazioni binarie *possibili*

1) $(t_1 - T)\,x_1 = (T - t'_1)\,v_1$
2) $(t_1 - T)\,x_2 = (T - t'_2)\,w_1$
3) $(t_2 - T)\,y_1 = (T - t'_1)\,v_2$
4) $(t_2 - T)\,y_2 = (T - t'_2)\,w_2$
5) $(t_3 - T)\,z_1 = (T - t'_1)\,v_3$
6) $(t_3 - T)\,z_2 = (T - t'_2)\,w_3$

Di queste basta prenderne tre in modo però che vi figurino tutte le cinque incognite.

Se, per es., prendiamo la 1ª, la 3ª e la 6ª i valori delle incognite saranno

$$x = x_1 \quad , \quad y = y_1 \quad , \quad z = z_2 \quad , \quad v = v_1 + v_2 \quad , \quad w = w_3$$

Prendendo tutte le $n\,n'$ equazioni e sommando i valori corrispondenti delle incognite si hanno i risultati già ottenuti ponendo la condizione già detta. Questo risultato si può più brevemente enunciare così.

69. — Quando i componenti sono in numero > 2 e non si pone la condizione suddetta si possono fare tanti miscugli parziali di due componenti in modo che vi figurino tutti quelli

dati, almeno una volta, ed ogni componente si prende in una quantità somma di quelle trovate per esso nei miscugli parziali.

Esempio. — *Date le qualità della applicazione precedente* 48, 47, 45, 38, 35, $T = 40$, possiamo fare i miscugli: 48 e 38; 47 e 38; 45 e 35. Il calcolo si dispone così

				Prova
48	2	2	$\cdot 48 =$	96
47	2	2	$\cdot 47 =$	94
45	5	5	$\cdot 45 =$	225
40				
38	$8 + 7 = 15$		$\cdot 38 =$	570
35	5	5	$\cdot 35 =$	175
		$29 \cdot 40\,(T) =$		1160

Ma si potevano prendere i miscugli

48 e 38 ; 47 e 35 ; 45 e 35 oppure
48 e 38 ; 47 e 35 ; 45 e 38 »
48 e 35 ; 47 e 38 ; 45 e 35 »
48 e 35 ; 47 e 38 ; 45 e 38 »
48 e 35 ; 47 e 35 ; 45 e 38

ottenendo in ogni caso risultati differenti.

Per ogni *miscuglio parziale* conviene semplificare il più possibile i risultati trovati, dividendoli per i comuni divisori.

Così nel caso precedente avremmo avuto

					Prova
48	[2]	1	1	$\cdot 48 =$	48
47	2		2	$\cdot 47 =$	94
45	[5]	1	1	$\cdot 45 =$	45
40					
38	[8]	$4 + 7$	11	$\cdot 38 =$	418
35	[5]	1	1	$\cdot 35 =$	35
			$16 \cdot 40\,(T) =$		640

70. — L'equazione generale del miscuglio

$$(t_1 - T)\,q_1 + (t_2 - T)\,q_2 + \ldots + (t_m - T)\,q_m = \\ = (T - t'_1)\,q'_1 + (T - t'_2)\,q'_2 + \ldots + (T - t'_n)\,q'_n$$

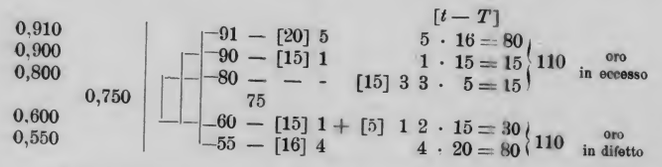
ha una interpretazione concreta speciale.

Se i coefficienti t esprimono *prezzi*, i monomi del primo membro indicano le *perdite* che si hanno attribuendo alle qualità superiori prezzo uguale al medio; ed il secondo membro indica gli *utili* che si hanno per la stessa ragione nelle qualità inferiori. *Quindi in un adequato di prezzo l'utile sulle qualità inferiori uguaglia la perdita sulle superiori.*

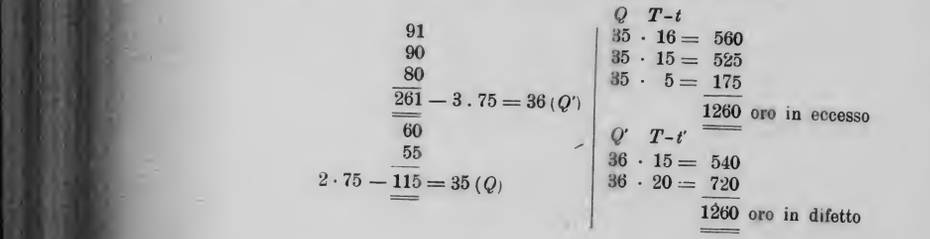
Se i coefficienti esprimono *titoli*, i monomi del primo membro esprimono le quantità di *fino* che le qualità superiori hanno in più confronto al titolo medio (*fino in eccesso*), quelli del secondo membro indicano il fino che manca alle qualità inferiori per avere il titolo medio (*fino in difetto*). *Quindi in un adequato di titoli, il fino in eccesso nelle qualità superiori uguaglia quello in difetto nelle inferiori.*

Da queste osservazioni si trae il mezzo per una più sollecita prova del miscuglio.

Esempio: Si vuole avere oro a 0,750 *con altro* a 0,910; 0,9; 0,8; 0,6; 0,550.



Come applicazione poniamo la condizione dell'uguaglianza tra le quantità superiori, e tra quelle inferiori. Si ha $m = 3$ ed $n = 2$



71. — Quando del miscuglio cercato fosse nota la quantità totale, basta ripartire questa in parti direttamente proporzionali

ai risultati ottenuti colla regola di miscuglio. Conviene adoperare la regola del n. 67.

Quando fosse assegnata la quantità da prendere *di un dato componente*, le quantità degli altri si ottengono con semplici proporzioni.

Così nella prima soluzione dell'esempio precedente fosse stabilito di prendere g. 20 di oro a 0,910 invece dei 5 risultanti dal miscuglio, si otterrebbero le quantità degli altri componenti così

$5 : 20 = 1 : x$ $\quad x = 4$ da 0,9
» $= 3 : x$ $\quad x = 12$ da 0,8
» $= 2 : x$ $\quad x = 8$ da 0,6
» $= 4 : x$ $\quad x = 16$ da 0,55

Quando fossero date tutte le quantità meno una il problema diventerebbe determinato, l'equazione fondamentale sarebbe ad una sola incognita, ma siccome valgono solo le soluzioni positive (event. anche nulle) il problema può non ammettere alcuna soluzione. Se, per es., trattandosi di merci, il miscuglio fatto colle quantità note dà perdita e la quantità incognita riguarda una merce di prezzo superiore al medio il problema è di impossibile risoluzione. Bisogna dunque che il risultato del miscuglio colle quantità date e quello relativo alla qualità di grandezza ignota vi sia contrapposizione di segno. L'incognita si otterrà dividendo il risultato del miscuglio parziale per il risultato relativo ad una unità di misura della qualità cercata.

Esempio. — Nel miscuglio di merci precedente sia ignota solo la seconda quantità. La disposizione del calcolo può essere questa:

Deve essere $13 + 7x = 27$, da cui $7x = 14$ ed $x = 2$.

Collo stesso procedimento si corregge un miscuglio già del tutto dato.

72. *Variazione del titolo.* — Si possono trovare delle semplici formule che risolvono il problema di variare il titolo di un corpo aggiungendone dell'altro ad un titolo diverso.

Sia q la quantità e t il titolo del corpo dato, t_1 il titolo da ottenere, x la quantità della nuova qualità da aggiungere e t_x il suo titolo. Il titolo è il rapporto tra il peso del fino ed il peso complessivo del corpo: il fino è uguale a quello di prima $q\,t$ più l'aggiunto $x\,t_x$ cioè $q\,t + x\,t_x$, il peso complessivo è $q + x$. Quindi

$$t_1 = \frac{q\,t + x\,t_x}{q + x}$$

da cui

$$x = q\,\frac{t - t_1}{t_1 - t_x}$$

Essendo solo valide soluzioni positive, deve essere $t_x > t_1 > t$ oppure $t > t_1 > t_x$ come è evidente dal semplice enunciato del problema.

Se $t_x = 1$ (aumento del titolo con aggiunta di fino)

$$x = q\,\frac{t_1 - t}{1 - t_1}$$

Se $t_x = 0$ (diminuzione del titolo con aggiunta di corpo neutro)

$$x = q\,\frac{t - t_1}{t_1}$$

Agli stessi risultati si arriva colla regola di miscuglio

$$\begin{array}{ccc} t & & t_1 - t_x \\ & t_1 & \\ t_x & & t - t_1 \end{array}$$

e siccome la quantità al titolo t è data (q), si fa

$$t_1 - t_x : t - t_1 = q : x$$

$$x = q\,\frac{t - t_1}{t_1 - t_x}$$

come sopra.

Applicazione.

Si vogliono portare g. 20 ***d'oro dal titolo di*** *0,480* ***a*** *0,750* ***aggiungendo dell'oro Standard.***

Conviene convertire i titoli decimali in carati

$$0{,}48 = \frac{11{,}52}{24} = \frac{5{,}76}{12}\ ;\ 0{,}75 = \frac{18}{24} = \frac{9}{12}$$

$$\text{Standard} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$$

$$\begin{array}{ccc} 5{,}76 & & 2 \\ & 9 & \\ 11 & & 3{,}24 \end{array}$$

E siccome si hanno g. 20 a 0,480 si fa

$$2 : 20 = 3{,}24 : x$$

$$x = 32{,}4$$

Prova.

g. 20 a $0{,}48\left(\frac{5{,}76}{12}\right)$ = g. fino $115{,}2/_{12}$

g. 32,4 a $\frac{11}{12}$ = g. fino $356{,}4/_{12}$

g. 52,4 a $\frac{18}{24}\left(\frac{9}{12}\right)$ = g. $471{,}6/_{12}$

Osservazione.

I valori negativi di x rispondono al problema: ***determinare la quantità*** x ***al titolo*** t_x ***da togliere dal metallo dato.*** Possono avere pratica utilità nel caso in cui $t_x = 0$ e quindi $t_1 > t$, cioè quando si vuole togliere della *lega*. In questo caso, trovato x, si determina il grezzo corrispondente y da *raffinare*. Si ha $y = y\,t + x$ e quindi $y = \frac{x}{1 - t}$.

Applicazione. — Determinare quanto grezzo si deve raffinare per portare g. 60 ***dal titolo*** 0,75 a 0,8.

Si ha da togliere della lega, quindi $t_x = 0$

$$x = q\,\frac{t_1 - t}{-\,t_1} = -\,60\,\frac{0{,}8 - 0{,}75}{0{,}8} = -\,3{,}75.$$

Quindi il grezzo da raffinare $y = \frac{3{,}75}{1 - 0{,}8} = 15$.

Infatti: togliendo 3,75 di lega il grezzo diventa $60 - 3{,}75 = 56.25$. Il fino è quel di prima $60 \cdot 0{,}75 = 45$. Il titolo è dunque

$$t_1 = \frac{45}{56{,}25} = 0{,}8$$

che si voleva ottenere.

I problemi precedenti quando è $t_x = 0$ oppure $t_x = 1$ si possono risolvere anche nel seguente modo:

a) $t_x = 0$. ***Abbassamento del titolo per aggiunta di lega.***

Il fino tq rimane invariato durante l'operazione, il nuovo grezzo è $\frac{tq}{t_1}$ (maggiore di q perchè $t > t_1$). La differenza $\frac{tq}{t_1} - q$ dà la lega da aggiungere.

Applicazione. — *Portare* 20 g. da 0,925 a 0,9 *aggiungendo rame*

fino $= 20 \cdot 0{,}0925 = 18{,}5$

grezzo nuovo $= 18{,}5 : 0{,}9 = 20{,}55$

lega da aggiungere $= 20{,}55 - 20 = 0{,}55$.

b) $t_x = 1$ ***innalzamento del titolo con aggiunta di fino.***

Indichiamo con t' e chiamiamo *titolo di lega* il rapporto fra la quantità di lega e quella di grezzo. Sarà $t' = 1 - t$ ed $l = q\,t'$. La lega $q\,t'$ rimane invariata durante l'operazione. Il nuovo grezzo (posto $t'_1 = 1 - t_1$) è $\frac{tq'}{t'_1}$ (maggiore di q perchè $t < t_1$, quindi $t - t > 1 - t_1$, cioè $t' > t'_1$). La differenza $\frac{t'q}{t'_1} - q$ dà il fino da aggiungere.

Applicazione. — *Portare* 60 g. da 0,75 a 0,8 *aggiungendo fino*

$t' = 1 - 0{,}75 = 0{,}25 \qquad t'_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

lega $= 60 \cdot 0{,}25 = 15$

grezzo nuovo $= 15 : 0{,}2 = 75$

fino da aggiungere $= 75 - 60 = 15$.

CAPITOLO NONO.

MONETA

73. — Una data ricchezza, potendo in un dato momento soddisfare in un individuo un bisogno di una particolare intensità, ha per esso un pregio o *valore d'uso* speciale personale e temporaneo. Qualunque esso sia, si deve però notare che, se due individui scambiano tra loro delle ricchezze, lo scambio avviene *solo fra quantità determinate* di esse. Il rapporto numerico fra le quantità scambiate, se si misurano colla stessa unità, e negli altri casi il gruppo di numeri che le esprimono viene preso come indice di un altro *valore*, diverso dal primo, detto di *scambio*. Il primo valore è un sentimento, non misurabile, il secondo, in senso lato, un numero.

Potendo qualunque ricchezza essere scambiata con qualunque altra, ognuna ha innumerevoli valori di scambio e bisognerebbe conoscerli tutti per avere un'idea completa del valore di scambio di essa, indipendentemente dal valore di uso. La cosa è singolarmente facilitata riferendo il valore di tutte le ricchezze ad un'altra sola, e convenendo di prendere come indice del valore di ogni altra le quantità di questa contro cui quella può essere scambiata.

A questa ricchezza arbitraria in quantità della quale verrebbero espressi i valori di scambio delle altre si dà il nome di *moneta*.

74. — Alla nozione di *moneta* non si è giunti per via teorica, anzi la moneta prima di essere *denominatore comune dei valori* fu *mezzo di scambio delle ricchezze.*

Se si esamina lo scambio diretto — permuta o baratto — si vede subito che esso specialmente se qualche poco intenso urta contro diverse difficoltà.

Quando un individuo porta una ricchezza al mercato per cambiarla con un'altra determinata, per completarvi lo scambio deve trovarvi qualcuno che possegga quella che egli cerca ed un altro che desideri quella da lui portata al mercato. Si può chiamare eccezionale il caso più favorevole in cui questi due formino una persona sola; allora lo scambio non sarà ostacolato che dalla opposizione d'interessi tra le parti. Nel caso più generale e meno favorevole, che sarà anche il più frequente, bisognerà trovare tanti individui venuti al mercato con ricchezze e desideri diversi fino a che non si possa stabilire un giro simultaneo di ricchezza dall'uno all'altro, che appaghi i desideri di tutti. Rimarranno fuori di questa permuta circolare diverse persone e queste dovrebbero ritornare ad un altro mercato, mentre possono essere costretti per diverse ragioni a disfarsi delle ricchezze portate; e vi possono essere altri che pure avendo bisogno di cedere la propria ricchezza non ne desiderano nessun'altra determinata in cambio.

Lo scambio sarebbe facilitato se esistesse una « *qualche cosa* » che potesse, per *qualche speciale ragione*, rappresentare le altre ricchezze, e permettesse di ottenerle contro di essa. Tale intermediario avrebbe tanta maggiore utilità quanto più lungo il tempo ed esteso il luogo per cui conservasse questa attitudine, potendo così servire non solo a scambi coevi sullo stesso mercato ma anche a quelli su mercati successivi e diversi.

La ragione della *comune accettazione* di questa cosa potrebbe risiedere nel suo valore intrinseco, considerata come ricchezza particolare, oppure derivare da accordi espliciti avvenuti volta per volta dalle parti, o tacitamente rinnovati quando fossero stabiliti dalla consuetudine.

Esistono di fatto delle ricchezze che vengono in confronto alle altre, più generalmente ricercate ed uniformemente richieste. Esse possono, in grado diverso, riempire l'ufficio di intermediario. Ogni scambio completo tra una ed un'altra ricchezza particolare si spezza in due; le ricchezze particolari si

cambiano contro questo intermediario e questo a sua volta contro quelle. Questa *ricchezza terza* è la *moneta* nella sua originaria e più importante funzione. Poi che le altre ricchezze particolari si cambiano tutte contro di essa, è facile e conveniente esprimere con *quantità di moneta* i valori di scambio di tutte le altre. Ed ecco la moneta *comune denominatore dei valori.*

Ma invece di cedere ricchezza intermediaria o particolare una delle parti può rilasciare all'altra una *promessa* di consegnargli qualche ricchezza in tempo e luogo determinati. Se l'altra parte ha fiducia nella esecuzione della promessa e può — perchè questa è rappresentata da qualche cosa, da uno scritto, ecc. — cederla ad altri come la ricchezza che ne è oggetto, potrà accettarla e servirsene per scambi presenti o futuri. Agli ostacoli proprî dello scambio delle ricchezze qui si aggiungono quelli derivanti dalla varia fiducia che coloro cui è offerta possono accordare a quella promessa. Ai primi si può ovviare stabilendo che l'oggetto della promessa sia una certa quantità di moneta, l'altro si può eliminare in quest'altro modo. Si supponga che esista una istituzione che goda la fiducia del pubblico e che abbia modo di giustamente valutare quella che meritano coloro che acquistano merci contro promesse scritte di moneta futura. Coloro che hanno cedute le ricchezze (i venditori) portano ad essa le promesse ricevute, questa le esamina e, quando le riconosce meritevoli di credito, le ritira, consegnando ai cedenti delle equivalenti quantità di *promesse proprie* di moneta, le quali hanno pel mercato in confronto alle altre il vantaggio di essere conosciute ed apprezzate da tutti e possono quindi circolare senza gli inconvenienti e gli ostacoli di quelle dei privati.

Negli attuali ordinamenti economici esse non sono identiche a quelle dei privati, non sono condizionate al decorrere di un certo tempo dalla data della loro *emissione.*

Gli istituti emittenti, data la diversità di scadenza tra le promesse accettate dai privati e quelle proprie emesse, tengono pronta una certa quantità di moneta come *riserva.* Le istituzioni in parola sono in generale *banche* e le loro promesse di

pronto pagamento in moneta a domanda del portatore, si dicono *biglietti di banca.*

75. — Tutte le ricchezze particolari potrebbero, teoricamente, diventare moneta, e molte che non lo sono affatto, furono per questo ufficio usate nei tempi passati, ma non tutte sono appropriate dal punto di vista pratico.

La moneta dovrebbe essere una cosa facilmente mobile e richiedere piccolissime spese di trasporto; essa deve essere una merce di piccolo peso e volume. Deve adattarsi a scambi piccoli e grandi, essere facilmente apprezzata colla sola indicazione della quantità (peso), perciò dev'essere un corpo divisibile (nel senso economico, cioè tale che il valore sia direttamente proporzionale alla quantità).

Dovendo servire a scambi non coevi deve essere di facile conservazione e custodia (dimensioni piccole relativamente al valore) con variazioni minime e poco durevoli di valore.

Le qualità richieste alla merce moneta si sono trovate riunite nel miglior modo nel metallo *oro* ed in grado minore nell'*argento*, i quali appunto da tempo remoto servono alla fabbricazione delle monete (coniazione). Così oggi la merce moneta è *una determinata quantità di metallo oro od argento*, designata con denominazione convenzionale [1] usata come intermediaria degli scambi e come unità per l'espressione dei valori delle altre ricchezze.

I privati sono liberi di fissare una qualunque controprestazione per le merci che vendono, quindi di stabilire date quantità di altre merci, ma i governi di tutti gli Stati hanno stabilito che i pubblici tributi si paghino con alcune date monete e che i debitori, in mancanza di espressa contraria stipulazione, possano estinguere con esse le loro obbligazioni. Queste monete che fanno parte dei *mezzi legali di pagamento* si dicono *legali*.

Per motivi di ordine pubblico la fabbricazione delle monete è avocata allo Stato ed esercitata da lui o da *enti specialmente autorizzati* (in stabilimenti detti Zecche) e l'emissione dei biglietti di banca è sottoposta a sorveglianza speciale.

[1] I nomi di molte monete antiche e moderne sono quelli stessi di alcune unità di peso; per es.: le diverse lire (libbre), il marco, il sesterzio, l'oncia (tael cinese, lu'o'ng annamita), peso, peseta, ecc.

In un regolare ordinamento monetario è stabilita una certa moneta, contenente una data quantità di metallo che riceve un nome particolare, e di cui tutte le altre legali sono multipli o sottomultipli secondo numeri interi. Quella moneta si dice *unità monetaria di quel sistema monetario.*

76. — Per piccoli valori *non è possibile* coniare delle vere monete di corrispondente pregio, e si sono messe in circolazione delle quantità di metallo formalmente simili alle monete vere e per le loro dimensioni come quelle maneggiabili; ma per il basso titolo del metallo prezioso o per la natura del metallo comune di cui son fatte, considerato il loro piccolo peso hanno un valore come merce molto più piccolo di quello che devono rappresentare quali *sottomultipli delle monete a pieno valore.* Queste monete *divisionali* sono piuttosto « gettoni » o « marche » ed hanno un valore di rappresentanza, cioè valgono come parti aliquote delle vere monete, *solo perchè è possibile cambiarle in data quantità contro quelle.* Sono coniate in quantità limitata ed hanno corso *legale* solo per limitati importi.

Sono, per così dire, delle « promesse stampate in metallo ». Siccome il loro valore di circolazione non risiede nella materia di cui son fatte, lo Stato coniatore può con economia sul costo, sostituirle con « biglietti di Stato ». La loro emissione deve essere limitata come quella delle monete divisionarie, e come le promesse che può emettere senza farle cadere nel discredito. Ma i rapporti economici dello Stato coi privati vanno crescendo di grandezza e di complessità e siccome — a differenza delle monete divisionarie metalliche — i biglietti di Stato vengono considerati come mezzi legali di pagamento senza limite di somma, anche in confronto allo Stato emittente, il loro importo può, senza loro discredito, essere rilevantissimo.

77. — Al cambio delle monete divisionarie con altre a pieno valore non si viene se non per necessità di avere monete che, avendo valore come merce, permettano di pagare là dove non esiste più l'equiparazione legale colle altre.

Così le monete a pieno valore possono anche non essere in circolazione e nemmeno essere coniate; è necessario e sufficiente che lo Stato si

obblighi a fare il cambio con una certa quantità di metallo. Fino a che questo cambio è possibile, questa quantità di metallo determina il valore delle monete in circolazione. È evidente che se la richiesta del cambio è continua occorre coniare e mettere in circolazione monete a pieno valore, ma se questa domanda di cambio è piccola e non continua, con una piccola riserva di metallo è possibile conservare un valore determinato ad una circolazione in metallo svalutato o in carta. Alcuni paesi a circolazione argentea, India, Stabilimenti degli Stretti, Messico, trovandosi ad essere sempre o quasi sempre *creditori verso l'estero* e non avendo quindi bisogno di esportare moneta, hanno adottato il sistema del *cambio aureo*. La Rupia indiana viene tariffata a 2 scellini di Lst; il $ messicano a g. 0,75 d'oro fino; il $ o Piastra degli Stretti si cambia in ragione di Lst. 7 per 60 $. Così è fissato in oro il valore basso e variabilissimo di queste monete d'argento.

La stabilità del sistema dipende dal credito dello Stato coniatore ed emittente e dalle condizioni dei pagamenti complessivi del paese da e per l'estero.

78. — Possono in un dato paese essere monete legali, senza limite di somma, solo le monete di un dato metallo ed allora si dice che il suo sistema monetario è *unimetallico* (oro od argento). Ma possono essere monete legali in eguali condizioni quelle di due o più metalli. Allora si possono avere due casi: 1°. Le monete di metallo diverso non sono legate da alcun rapporto fisso legale di valore ed hanno, occorrendo, monete divisionarie proprie, in modo da costituire più sistemi monetarii unimetallici coesistenti ed indipendenti. Nessun paese ha attualmente un ordinamento monetario legale siffatto. 2°. Una è l'unità monetaria ma essa (ed i suoi multipli e sottomultipli) può essere coniata nell'uno e nell'altro metallo secondo le convenienze dell'uso, serbando però sempre tra le quantità di fino di metallo diverso un certo rapporto $\frac{x}{y}$ a parità di valore legale, e quindi un *rapporto fisso* di valore $\frac{x}{y}$ a parità di peso di fino di metallo diverso. Nessun ordinamento monetario attuale è effettivamente e presentemente in queste condizioni. E ciò per le seguenti cause: Il rapporto tra i valori correnti dei due metalli non coincide che raramente col *rapporto fisso* stabilito, ed ogni differenza tra i due rapporti corrisponde ad una sopravalutazione di uno dei due metalli in confronto all'altro che resta svalutato.

Il metallo svalutato dal rapporto fisso ha più potenza d'acquisto come merce quando non è monetato e quindi esce dalla circolazione, l'altro sopravalutato viene portato alla zecca; si ha quindi la tendenza al sistema unimetallico sulla base di quest'ultimo metallo.

Per le condizioni della sua produzione, il metallo che più a lungo è stato in queste condizioni è l'argento, così i paesi bimetallisti hanno dovuto da tempo sospendere la coniazione libera (per conto dei privati). In tal modo la moneta d'argento non ha potuto crescere in quantità tale da acquistare e fare sparire l'altra, ma si è ridotta ad avere un valore di rappresentanza come una moneta divisionaria.

79. — Le monete vere per definizione, sono *quantità determinate di metallo*. Ricevendo una forma ed una impronta esse acquistano una facilità speciale di circolazione, ma il loro valore sostanzialmente non cambia. L'impronta garantisce entro certi limiti la bontà del metallo ed il peso, ma il nome che vi è impresso non ha alcuna influenza sul valore.

Da una data quantità di metallo ad un certo titolo si conia sempre lo stesso numero delle stesse monete. Il numero di monete coniate con una unità di peso di metallo si dice *piede* se il metallo è fino, *taglio* se ha lo stesso titolo della moneta.

Non essendovi diversità alcuna nel valore tra metallo monetato e non, i privati che ne vendono alla Zecca dovrebbero avere sotto forma di moneta una quantità identica a quella venduta. Questo non avviene in nessun luogo. In alcuni paesi, come da noi, il numero delle monete che il venditore riceve è minore di una quantità fissa del numero di monete che la Zecca fabbrica col metallo comprato. Ad esempio: con kg. 1 d'oro fino lo Stato italiano fa L. $3444,^4/_9$ d'oro, ma il venditore ne riceve soltanto 3437. La differenza trattenuta si dice *diritto di conio* e serve come compenso delle spese di coniazione. Altri Stati pagano lo stesso numero di monete coniate, ma qualche tempo dopo la consegna del metallo, causando una perdita d'interessi. Così fa la Zecca d'Inghilterra.

80. — Il potere acquisitivo della moneta vera è il valore della merce-moneta e dipende dalla quantità del metallo fino

contenuto: date quindi più monete dello stesso metallo i poteri acquisitivi di esse staranno nello stesso rapporto dei fini rispettivi. Monete di metallo diverso non si possono confrontare se non valutando nel metallo di una di esse la quantità del metallo diverso dell'altra moneta; se una appartiene ad un sistema bimetallico si userà il suo rapporto fisso tra oro ed argento, se entrambe appartengono ad un sistema unimetallico bisogna adoperare il valore corrente di uno dei due metalli espresso nell'altro, valore variabile.

Il rapporto, così determinato, tra i poteri acquisitivi di due monete si dice *parità teorica* di esse; è *fissa* per le monete di ugual metallo o quando una appartiene ad un sistema bimetallico, *variabile* per quelle di sistemi unimetallici su metallo diverso.

Si deve notare che le monete si apprezzano per il peso e per il titolo che effettivamente hanno, diversi in generale da quelli teorici, per diverse ragioni. Quando una moneta ha in un paese valore legale, a queste differenze di peso e di titolo sono stabiliti dei limiti detti *tolleranze*, oltrepassati i quali essa non ha più valore legale.

81. — Tra i più evidenti inconvenienti della diversità fra le monete dei varî paesi vi ha quello della non pronta comprensione dei prezzi delle cose, tanto più se vi si aggiunge la diversità delle misure.

Non si è ancora avuto un sistema monetario che come il sistema metrico decimale possa diventare mondiale, e si deve osservare che, come la quantità x di merce in un dato luogo non è equivalente ad x in un altro, per cali perdite ed alterazioni naturali durante il viaggio, così la somma y in un certo luogo non è equivalente ad y in un altro, per spese di trasmissione ed altre.

Tuttavia Stati vicini aventi frequenti relazioni di affari hanno adottato la stessa unità monetaria; altri, per ragioni di razza di coltura di politica hanno tra di loro convenuto alcuni patti tra cui quello che alcune monete da essi coniate fossero mezzo legale di pagamento in tutti i paesi aderenti.

Italia Francia Svizzera Belgio Grecia hanno fatto tra loro

alcuni di tali patti, formando la cosidetta Unione monetaria latina. Danimarca Svezia Norvegia hanno similmente fatto la Unione monetaria scandinava.

82. — PRINCIPALI UNITÀ MONETARIE

Paesi	Unità monetarie Nome	Abbrev.	Parità in L.	Sistema	Osservazione
Italia (1)	lira	L			
Francia, Svizzera, Belgio, Grecia	franco	Fr			
Rumania	lei		1,—	BM	La coniazione dell'argento non è libera. Diviso in 100 centesimi.
Serbia	dinar				
Bulgaria	leu				
Spagna	peseta	pta			
Finlandia	markka			O	
Gran Bretagna	lira sterl.	Lst	25,2214	O	Divisa in 20 *shillings* (scellini) (*s*), da 12 *pence* (denari) (*d*) (2).
Germania	marco	*M*	1,2346	O	
Austria-Ungheria	corona	Kr	1,0501	O	
Dan. Sv. Norv.	corona	Kr	1,389	O	
Olanda	fiorino	*fl*	2,0832	O	Diviso in centesimi ma nel listino di Londra ancora in 20 Stuber.
Russia	rublo	R°	2,666	O	In 100 kopeki.
Portogallo	Milreis	Mr	5,60	O	
Stati Un. d'Am.	Dollaro	$	5,1825	O	In 100 cents (*c*).
Canadà	Dollaro	$	5,1825	O	In 100 cents (*c*).
Argentina	Peso		5	O	
Brasile	Milreis		2,832	O	
Australia	lira austr.		27,59	O	Più le monete inglesi.
Indie Brit.	rupia	Rp	2,522	A	Cambio aur. Rp 10 = Lst 1.
Giappone	Yen		2,583	O	
Cina	non vi è una vera unità monetaria. Servono verghe d'argento il cui peso è espresso in *Taels* che per le Dogane cinesi è di g. 37,72. L'istituzione di un sistema monetario è in progetto.				

(1) In Eritrea e Somalia anche il Tallero di Maria Teresa.

(2) Si scrive Lst. 4 . 8 s . 5 d; invece di 20 . 6 d, 2/6 e così 2 s, 2/-. Per esprimere prezzi dati in monete inglesi con altre unità monetarie conviene ridurre *s* e *d* in decimali di Lst. Si fa più comunemente così: $1\ s = \text{Lst}\ \frac{1}{20} = \text{Lst}\ 0{,}05$, perciò *si moltiplica il numero degli scellini* per 0,05; $1\ d = \text{Lst}\ \frac{1}{240}$, trascurando la differenza si fa $= \text{Lst}\ \frac{1}{250} = \text{Lst}\ 0{,}004$ perciò si *moltiplica il numero dei denari per 0,004*.

L'errore non è sempre trascurabile se si opera su prezzi unitari; esat-

83. *Calcoli diversi sulle monete. — Il pezzo d'oro da fl 10 pesa g. 6,72 ed è al titolo 0,9. Trovarne la parità teorica col franco il cui piede per kg è 3444 4/9.*

$$\text{Fino del } fl \text{ in } g \quad f' = \frac{6{,}72 \cdot 0{,}9}{10}$$

$$\text{fino del } fr \text{ in } g \quad f'' = \frac{1000}{3444{,}^4/_9}$$

$$frs \text{ equivalenti ad } 1\ fl = \frac{f'}{f''} = \frac{6{,}72 \cdot 0{,}9 \cdot 3444{,}^4/_9}{10 \cdot 1000} = 2{,}0832$$

oppure colla congiunta

frs x	1 *fl*
fl 10	6,72 *g* (0,9) oro
g (0,9) 10	9 *g* fino
g oro *f* 1000	3444,4/9 *frs*

e si ha per x il valore trovato sopra.

Con 40 lb t d'oro standard si coniano 1869 pezzi da 1 Lst (sovereigns). Trovarne la parità teorica col franco (dati come sopra).

---

tamente si fa

$$1\ d = \text{Lst } \frac{1}{240} = \text{Lst } \frac{5}{1200} = \frac{4}{1200} + \frac{1}{1200} = \frac{1}{300} + \frac{1}{1200}.$$

Perciò *si divide il numero dei denari per 300 ed al risultato si aggiunge la sua quarta parte* $\left(\frac{1}{1200} = \frac{1}{300} : 4\right)$.

Esempio: Lst 4 . 6 *s* . 8 *d*.

Col 1° modo

Lst 4	Lst 4,—
6 *s* · 0.05	» 0,30
8 *d* · 0.004	» 0,032
	Lst 4,332

Col 2° modo

Lst 4	Lst 4
6 *s* · 0,05	» 0.30
8 *d* : 300	» 0,02666
$+\frac{1}{4}$ · 0,02666	» 0,00666
	Lst 4,33333

L'errore massimo si ha per 11 *d* · 3/4.

1° modo

$11\ ^3/_4 \cdot 0{,}004 = \text{Lst } 0{,}047$

2° modo (esatto)

$11\ ^3/_4 : 300 = \text{Lst}$	0,03916
$+\ ^1/_4$	» 0.00979
	Lst 0,04895

con una differenza di Lst 0,00195, alla pari circa Lit 0,04918; che su prezzi unitari potrebbe essere rilevantissima.

$$\text{Fino di 1 } sovr \text{ in } g \cdot f' = \frac{40 \cdot \frac{22}{24} \cdot 373{,}24}{1869}$$

$$\text{fino di 1 } fr \text{ in } g \cdot f'' = \frac{1000}{3444{,}^4/_9}.$$

$$frs \text{ equivalenti ad 1 } Lst = \frac{f'}{f''} = \frac{40 \cdot 22 \cdot 373{,}24 \cdot 3444{,}^4/_9}{1869 \cdot 24 \cdot 1000} = 25{,}221$$

oppure colla congiunta

frs x	1 *Lst*
Lst 1869	[40] 10 *lb T* oro *St*
lb T St [24] [6] 3	[22] 11 *lb T* fino
lb T f 1	373,24 *g* fino
g f 1000	3444,4/9 *frs*

risultato come sopra.

Il pezzo da 10 R° pesa 193.601 Doli ed è al titolo 0,9. Trovarne il valore in d di Lst (coi dati precedenti).

$$\text{Fino del } R^o \text{ in } g \cdot f' = \frac{193.601 \cdot 0{,}9 \cdot 409{,}51}{10 \cdot 96 \cdot 96}$$

$$\text{fino del } d \text{ in } g \cdot f'' = \frac{40 \cdot \frac{22}{24} \cdot 373{,}24}{1869 \cdot 240}$$

$$d \text{ equivalenti ad 1 } R^o = \frac{f'}{f''} = \frac{193.601 \cdot 0{,}9 \cdot 409{,}51 \cdot 1869 \cdot 240 \cdot 24}{10 \cdot 96 \cdot 96 \cdot 40 \cdot 22 \cdot 373{,}24}$$

oppure colla congiunta

d x	1 R^o
R^o 10	193,601 *Doli* (0,9)
Doli (0,9) [96] 4	1 Solotnik (0,9)
Solotnik (0,9) [96] 4	409,51 *g* (0,9) (1 *lb* russa)
g (0,9) [10] 1	9 *g* fino
g · *f* 22	[24] 1 *g* Standard
g · *St* 373,24	1 *lb T St*
lb T St 40	1869 *Sovr*
Sovr 1	[240] 1 *d*

risultato come sopra.

Trovare il taglio per lb T Standard della Sovereigns la cui parità teorica è di fr. 25,2214 (per il fr dati come nei precedenti esercizi).

Si trova quanto oro contiene

$$1\ fr\ g\ \frac{1000}{3444{,}^4/_9};$$

$$1\ sov\ \frac{1000 \cdot 25{,}2214}{3444{,}^4/_9}$$

si converte in *lb T* dividendo per 373,24, ed in Standard dividendo per $\frac{22}{24}$;

$$lb\ T\ \text{Standard} \quad \frac{1000 \cdot 25{,}2214 \cdot 24}{3444{,}^{4}/_{9} \cdot 373{,}24 \cdot 22}$$

Il *valore reciproco dà il taglio*; oppure colla congiunta

Sovr x	1 *lb T St*
lb T St 24	22 *lb T* fino
lb T f 1	373.24 *g* fino
g · f · 1000	3444,$^{4}/_{9}$ *frs*
frs 25,2214	1 *sovr*

Risultato come sopra (1869).

Trovare il peso in grs di $ 1 d'oro che vale L. 5,1826 ed è al titolo 0,9.

$$\text{Fino in } g \quad \frac{1000 \cdot 5{,}1826}{3444{,}^{4}/_{9}};$$

il peso in *g* si ha dividendo per 0,9, ed in *grs* (troy)

$$\frac{1000 \cdot 5{,}1826 \cdot 5760}{3444{,}^{4}/_{9} \cdot 0{,}9 \cdot 373{,}24} = 25{,}8\ grs$$

oppure colla congiunta

grs x	1 $ oro
$ 1	6,1826 *L*
L 3444,$^{4}/_{9}$	1000 *g* oro fino
g f 0,9	1 *g* (0,9)
g (0,9) 373,24	5760 *grs Troy* (1 lb T)

Risultato come sopra.

Trovare il titolo della Lst, che vale fr. 25,2214 e di cui 1869 pezzi pesano 40 lb T (per il fr dati precedenti).

$$\text{Titolo} = \frac{\text{fino}}{\text{grezzo}}\ \text{(decimali)},\ \text{per avere i carati si moltiplica per 24}$$

$$lb\ T\ \text{fino} = \frac{1000 \cdot 25{,}2214}{3444{,}^{4}/_{9} \cdot 373{,}24}$$

$$lb\ T\ \text{grezzo}\ \frac{40}{1869}$$

$$\text{titolo in carati}\ \frac{1000 \cdot 25{,}2214 \cdot 1869 \cdot 24}{3444{,}^{4}/_{9} \cdot 373{,}24 \cdot 40} = 22$$

oppure colla congiunta

lb T fino *x*	24 *lb T* grezzo
lb T grezzo 40	1869 *sov*
sov 1	25,2214 *fr*
fr 3444,$^{4}/_{9}$	1000 *g* oro fino
g f 373,24	1 *lb Troy* fino

Risultato come sopra.

84. *Quotazioni dei metalli preziosi.* — Il metallo che è base di un dato sistema monetario viene acquistato dalla Zecca o dagli Istituti bancarî d'emissione ad un *prezzo fisso*, ma ha sul mercato come qualunque altro metallo un prezzo corrente.

Diverse sono le quotazioni, sulle diverse piazze.

Londra. La Banca d'Inghilterra riceve l'oro a 77/9 per *oz St.* Sul mercato i prezzi sono per l'oro in *s* e per l'argento in *d* per *oz Standard.*

New-York. L'oro ad un tanto $^{0}/_{00}$ di premio sulla pari di $ 800 valore di 43 *oz Troy* a 0,9.

L'argento in *cents* d'oro per *oz Troy fino.*

Parigi. L'oro ad un tanto $^{0}/_{00}$ di *premio* o di *perdita* sulla pari di *fr.* 3437 per *kg* fino.

L'argento in *fr* per *kg* fino.

Prezzo legale fisso per l'oro nei paesi dell'Unione latina *fr.* 3437. Su altre piazze continentali i prezzi si riferiscono ad 1 *kg.* fino; Berlino e Vienna a $^{1}/_{2}$ *kg.*

Hanno prezzo corrente le monete estere; o per pezzo, od a peso, come il metallo non coniato.

Sono di facile determinazione i rapporti tra le quotazioni inglesi ed americane e quelle del sistema metrico decimale.

Indicando con *q* la quotazione estera e con *p* la parità pratica della moneta estera colla lira (o col franco o quell'altra unità monetaria che si sceglie), si hanno le seguenti congiunte.

Per le quotazioni di Londra

Argento

L x	1000 *g* fino
g fino 373,24	12 *oz t* fino
oz t f 222	240 *oz t St*
oz St 1	q_d (quotazione in *d*)
d 240	*p L* (parità pratica della *Lst*)

$$x = \frac{q_d \cdot p}{6{,}9049}$$

Oro (q ridotto in *d*)

L x	1000 *g* fino
g fino 373,24	12 *oz t* fino
oz fino 22	24 *oz St*
oz St 1	q_d (quotazione in *d*)
d 240	*p L* (parità pratica della *Lst*)

$$x = \frac{q_d \cdot p}{6{,}8427}$$

Per le quotazioni di New-Jork.

Argento

$L\ x$	1000 g fino
g fino 373,24	12 $ox\ t$ fino
$ox\ f\ 1$	q_c (quot. in *cents*)
c 100	$p\ L$ (parità del $)

$$x = \frac{q_c\ p}{3{,}11035}$$

Oro (q quotazione in $)

$L\ x$	1000 g fino
g fino 373,24	12 $ox\ T$ fino
ox fino 9	10 $ox_{(0,9)}$
$ox_{(0,9)}$ 43	q $
$ 1	$p\ L$ (parità del $)

$$L\ x = \frac{q\ \$\ \cdot\ p}{1{,}2037}$$

85. — Fino a che i privati possono accettare invece della moneta e rifiutare il biglietto di banca (*corso fiduciario*), o conservano la facoltà di farselo cambiare in moneta presso l'istituto emittente (*corso legale*), il biglietto non può avere valore inferiore alla moneta che rappresenta, anzi viene a questa preferito per la maggiore comodità della sua conservazione e del suo trasporto.

Se il cambio viene sospeso ed il biglietto è mezzo legale di pagamento (*corso forzoso*), quando l'***emissione supera il bisogno di una giusta circolazione*** si verifica un deprezzamento del biglietto in confronto alla moneta vera seguito dalla sparizione di quest'ultima. Quando la moneta vera occorre, si deve *comperarla*, pagando con biglietti in più del valore nominale acquistato, un *aggio* che viene ragguagliato, per solito, ad un tanto per cento. Così se, dovendo pagare un dazio doganale in oro, bisogna pagare un *aggio* del 9,75 %, vuol dire che per avere 100 lire in oro, bisogna in carta e divisionali spendere L. 109,75. E se si vuol cambiare in oro una certa somma S di biglietti, si avrà solo

$$\frac{S\ \cdot\ 100}{109{,}75}.$$

CAPITOLO DECIMO.

DELLA CAMBIALE

86. — Quella promessa di pagamento [74] che il compratore dà al venditore invece della moneta, per poter facilmente circolare deve essere fatta in tal modo da non richiedere altri documenti per provare il debito di chi l'ha rilasciata; essere facilmente cedibile senza formalità lunghe o dispendiose; chi la riceve non sia obbligato a stimare la fiducia che merita chi l'ha fatta e che forse non conosce nè conoscerà mai, gli debba essere sufficiente garanzia il nome di chi gliela cede; in caso di non avvenuto pagamento da parte dell'obbligato siano aperte al possessore vie sollecite per entrare in possesso della somma promessa nel titolo.

Questo si ottiene collo stabilire che il titolo abbia valore senza che porti l'indicazione della sua causa, che per la cessione basti la firma del cedente (*titolo all'ordine*), che tutti i successivi possessori siano garanti verso l'ultimo del pagamento del titolo, e che una volta accertata la mancanza di pagamento da parte dell'obbligato principale il titolo possa valere come « titolo esecutivo » per rivalersi sui beni di qualunque obbligato o garante del pagamento. Infine, siccome chi riceve il titolo non può assicurarsi dell'autenticità delle firme che vi figurano, siano gravemente puniti gli autori di false firme [1].

Questo titolo, regolato in modo quasi identico da tutte le vigenti legislazioni è denominato *cambiale*.

87. — Esso nasce in due modi ed assume due forme: o viene rilasciato dal debitore (*emittente*) al creditore (*prenditore*), e contiene l'obbligo di pagare, e si dice allora *pagherò* o *vaglia cambiario*; oppure il creditore (*traente*), se i patti convenuti lo permettono, ordina al debitore (*trattario*) di pagare ad un terzo od a lui stesso (*prenditore*) e si obbliga verso questo terzo a far pagare il titolo, ed allora la cambiale si dice *tratta*.

La cambiale differisce profondamente da un'altra qualsiasi obbligazione, perciò il legislatore ha stabilito che abbia una forma (un contesto)

[1] Da noi, come gli autori dei falsi in atti pubblici.

quale valore abbiano le clausole aggiuntevi, *e che al momento in cui si vuol fare valere contro l'obbligato contenga alcuni essenziali requisiti* (1).

I requisiti essenziali sono:

il *bollo*: l'effetto va compilato su carta bollata di costo diverso secondo l'importo (2);

la *data*: luogo giorno mese anno dell'emissione;

la *scadenza*: giorno in cui diventa pagabile;

l'*indicazione di cambiale* o *lettura di cambio*;

la *somma* (3);

la *firma del traente o dell'emittente*;

il nome del *trattario* (nella tratta);

(il *luogo di pagamento*).

88. — La *scadenza* può essere indicata in varî modi; due propri della tratta e sono:

a *vista*, cioè a presentazione;

a *certo tempo vista* cioè trascorso il certo tempo dopo la presentazione;

altri comuni a tutte le cambiali, e sono:

a *giorno fisso*: se alla *metà del mese*...., il 15° giorno, se a *fine mese*...., l'ultimo giorno di questo;

a *certo tempo data*: cioè trascorso quel certo tempo dalla data d'emissione. Se il certo tempo è espresso in mesi la scadenza avviene nel giorno corrispondente alla data nel mese di scadenza, oppure nell'ultimo giorno di esso;

in fiera (caduta in disuso).

Il *luogo di pagamento* è, in mancanza di espressa indicazione, il luogo d'emissione del pagherò, o quello indicato come residenza del trattario nella tratta. Se è indicato un luogo ed una persona diversa la cambiale si dice *domiciliata*. Nelle tratte è il traente od un possessore che — usualmente — indica il luogo di pagamento, il trattario dirà poi *presso* chi il titolo sarà pagabile.

89. — La cambiale è un *titolo all'ordine*, viene ceduto per mezzo di *girata* che consta essenzialmente della firma del cedente (*girante*) apposta a tergo del titolo. Si può cedere la proprietà della cambiale con tutti i diritti del girante oppure una proprietà limitata, od alcuni diritti soltanto.

Se si cede la proprietà completa della cambiale il girante appone la sola sua firma (*girata in bianco*) oppure indica anche il nome del nuovo possessore (*giratario*) colla formula: *E per me pagate al Sig. N. N.*

Se si cede la cambiale per farla riscuotere per nostro conto la firma della girata è: *E per me pagate al Sig. N. N. valuta per incasso* (oppure: *per mandato* o *per procura*). Il giratario ha diritto ed obbligo di

(1) La cambiale che contiene solo la firma dell'obbligato si dice *in bianco*.

(2) V. più avanti.

(3) La promessa d'interessi, anche se scritta sulla cambiale, è priva di valore cambiario.

presentare a tempo debito il titolo e di fare in caso di impossibile riscossione tutti i prescritti atti conservativi come se fosse il vero creditore.

Alcune clausole speciali limitano i diritti del giratario. Sono le seguenti girate:

non all'ordine. Il girante contrae obbligazione cambiaria verso il proprio giratario e non verso i successivi possessori;

senza garanzia (1). Il girante non risponde del pagamento dell'effetto verso nessuno dei successivi possessori. Questa clausola gravissima colpisce di sfiducia il titolo e gli può precludere la circolazione. Si preferisce un contratto a parte tra girante e giratario (*forfait*);

valuta in garanzia. La cambiale serve come pegno per un'altra obbligazione.

90. — Il trattario non ha nessuna obbligazione cambiaria prima di accettare l'ordine del traente. L'*accettazione* si dà apponendo la firma (preceduta o no dalla parola *accetto*) nella parte anteriore dell'effetto, e, nelle tratte a certo tempo vista, colla data. Se l'accettazione viene rifiutata od è parziale, c'è forte presunzione che l'effetto alla scadenza non sarà pagato o solo in parte, perciò il possessore ha diritto di chiedere cauzione ai precedenti possessori fino al traente. A prevenire il pericolo di dover dare cauzione, qualunque obbligato può indicare un trattario sussidiario a cui il possessore *deve* rivolgersi dopo avere inutilmente richiesto il trattario principale. Il trattario sussidiario si indica colla locuzione: *al bisogno*, oppure: *occorrendo presso N. N.* Può anche un terzo intervenire ed accettare la cambiale per l'*onore della firma* di uno degli obbligati cambiari, ma solo dopo constatata legalmente la mancata accettazione da parte del trattario.

Per mandare la tratta all'accettazione e nello stesso tempo negoziarla servono i *duplicati* che ogni possessore può attraverso i precedenti giranti richiedere al traente (2). Essi si distinguono colle locuzioni: *prima*, *seconda*, ecc. *di cambio*. Uno dei duplicati es. la *prima*, si manda all'accettazione per mezzo di un terzo, scrivendo sulla *seconda* che si negozia: *la prima all'accettazione presso N. N.* Solo un duplicato deve essere accettato.

Se impossibili i duplicati, si possono fare da qualunque possessore dell'effetto delle *copie* di esso ed usarne come i duplicati: ma il loro credito è limitato alle firme autentiche che contengono.

91. — Se la firma di un obbligato cambiario gode poco credito può un terzo portarsi garante per lui nelle forme cambiarie mediante l'*Avallo*. Esso si esprime colla locuzione: *per avallo*, seguita dalla firma dell'*avallante*. Se il nome dell'*avallato* non è detto, la garanzia si intende data per colui che, pagando l'effetto, libera il maggior numero di obbligati cambiari. L'avallante che paga acquista tutti i diritti del possessore dell'effetto.

92. — La cambiale è pagabile nel luogo e nel giorno indicati; se scade in giorno festivo, il primo giorno non festivo seguente. Se l'importo

(1) Si usa talvolta nella restituzione di un effetto prima della scadenza al posto della quitanza.

(2) Può essere utile avere duplicati del *pagherò*; si richiedono all'emittente.

è indicato due volte in somma diversa, si paga la minore. Se è espresso in moneta diversa da quella legale del paese dove scade, il pagamento si fa in moneta legale al corso indicato nel titolo od in difetto a quello del cambio della piazza commerciale più vicina; salvo che vi sia la clausola « *effettive* » od altra equivalente. Non si può rifiutare un pagamento parziale (1).

93. — Il *protesto* è l'atto pubblico e solenne indispensabile per provare il puntuale adempimento delle pratiche prescritte dalla legge per l'esercizio dell'azione cambiaria, ed il loro risultato (2), quando si debba agire contro obbligati ai quali non è legalmente noto che una obbligazione cambiaria non è stata soddisfatta.

Esso è fatto da notaio od usciere di tribunale.

Può essere sostituito da una dichiarazione di rifiuto scritta sulla cambiale o su documento a parte, registrata entro due giorni dalla data, e fatta nel tempo in cui si può fare il protesto, cioè entro due giorni *dopo* quello del pagamento.

Sono obbligati solidalmente — in via di regresso — tutti i giranti dell'effetto (fino al traente) e gli avallanti, al pagamento dell'effetto e degli accessori (interessi e spese).

94. — Per esercitare l'*azione di regresso* il possessore deve avvisare, con lettera raccomandata, il suo girante entro due giorni dal protesto, e questo il proprio, e così via, entro due giorni dal ricevimento dell'avviso. Questa azione va esercitata entro certi limiti di tempo. Si fa traendo su un obbligato, una cambiale *di rivalsa* per un importo (di capitale interessi e spese) dimostrato da un *conto di ritorno*, accompagnandola con l'effetto protestato ed il protesto; oppure più semplicemente rimettendo l'effetto col protesto e conto delle spese; od anche con azione giudiziaria (precetto o citazione).

Il possessore può esercitare l'*azione diretta* contro l'obbligato al pagamento adoperando l'effetto protestato come *titolo esecutivo*, e procedere all'esecuzione forzata.

Se per il verificarsi di una delle condizioni previste dalla legge il possessore perdesse il diritto all'azione cambiaria, gli è, in certi casi, permessa l'azione di indebito arricchimento contro il traente, e, quando l'effetto è domiciliato anche contro l'accettante o l'emittente.

95. — Chi ha somme disponibili presso un commerciante può disporne a favore proprio o d'altri mediante un ordine scritto detto *Assegno bancario* o *chèque*, per il quale valgono le disposizioni date per la cambiale circa la girata, l'avallo, la scadenza ed il pagamento, il protesto, l'azione verso traente e giranti.

Suoi requisiti formali sono:

il *bollo* (3);

la *data*;

la *somma*;

la *firma del traente*.

Deve evidentemente contenere anche il nome del trattario.

Può essere al portatore.

La sua scadenza è a vista od entro un termine non maggiore di 10 giorni dalla presentazione; esso deve essere presentato per il visto entro 8 o 15 giorni dalla data (a seconda che è pagabile nel luogo dove è stato fatto od altrove). Ritardando la presentazione (sia per il visto che per il pagamento) si perde l'azione contro i giranti, ed anche quella contro il traente se, dopo questi termini, la disponibilità della somma è mancata, per fatto del trattario.

Ditte bancarie aventi diverse succursali od agenzie hanno istituito un servizio di *assegni circolari*, che, tratti da un cliente e vistati dalla direzione di uno dei suoi stabilimenti, sono esigibili presso qualunque di essi.

Le disposizioni sulla girata, protesto, ecc., sono applicabili ai *vaglia cambiari* degli istituti di emissione, pagabili a presentazione presso qualunque loro succursale.

96. — Quando la cambiale viene ceduta contro moneta il giratario paga la somma dell'effetto diminuito di un compenso per l'anticipato pagamento tenendo conto del tempo che manca alla scadenza. Questo compenso si dice *Sconto* e viene calcolato colle formule dell'interesse semplice (1). Lo sconto ha un *tasso* (come l'interesse) molto variabile e diverso alla stessa data secondo la durata degli effetti per cui deve essere adoperato. Il tasso di sconto delle Banche d'emissione si dice *sconto ufficiale o di banca*, quello delle altre banche o banchieri, *sconto libero* o *fuori banca*. Talvolta la diversità fra i due tassi è notevole.

Dalla rubrica finanziaria del giornale inglese *The Times* del 29 maggio 1916, riproduco qualche notizia sul mercato del denaro a Londra. « Il tasso di banca sta al 5 % a cui è stato ridotto l'8 agosto 1914. I tassi di deposito dei banchieri sono 3 1/2 %, i tassi di deposito delle case di sconto sono 4 % a vista e 4 1/4 dietro avviso ».

Prestiti %		Sconto (Effetti bancari) %			
Giorno per giorno	Per brevi periodi	60 giorni	3 mesi	4 mesi	6 mesi
4	4	4 7/16 - 4 1/2	4 9/16	4 11/16	4 3/4 - 4 7/8

Sconto (buoni del tesoro)				Buoni effetti commerciali		
3 mesi	6 mesi	9 mesi	12 mesi	3 mesi	4 mesi	6 mesi
4 1/2 % Lst 98.17.6 3/4	4 3/4 % Lst 97.12.1 1/4	4 3/4 % Lst 96.8.2	5 % Lst 95.0.3 1/4	5	5 1/4	5 1/2

(1) Si gira utilmente *per incasso* ad una banca, o si ricorre agli uffici postali, pagando determinati diritti o provvigioni, postali, ecc.

(2) V. Vivante, *Trattato di Diritto Commerciale*, vol. 3°, pag. 491.

(3) V. più avanti.

(1) Non si deve dedurre che lo sconto del denaro e l'interesse dei capitali siano la stessa cosa.

Gli effetti che sono pagabili su piazze dove le banche d'emissione hanno succursali od agenzie e che scadono fra un tempo non maggiore di quello massimo (4 mesi) a cui queste banche possono per i loro regolamenti scontare, ed hanno un prescritto numero di firme, si dicono *bancabili*; *non bancabili* quelli che non rispondono a queste condizioni.

Un effetto che non è bancabile per eccesso di durata lo diventa col passare del tempo; se per il luogo di pagamento, può diventarlo con una opportuna *domiciliazione* su piazza bancabile.

Gli effetti non bancabili sono scontati a condizioni meno buone degli altri, secondo il caso con uno sconto più alto o con una *perdita di piazza* (‰ sull'importo).

Se il tempo di sconto è breve o molto piccolo l'importo, chi sconta ha un compenso troppo tenue in confronto alle spese ed al rischio, perciò si stabilisce uno *sconto minimo* di L. 1 o di L. 0,50 per effetto.

Talvolta, quando chi sconta è un banchiere ed il tasso è minore di quello ufficiale, una parte dello sconto è calcolata al tasso ufficiale, precisamente per la minima durata (5 giorni o 10) a cui le banche d'emissione accettano effetti allo sconto, perchè in caso di bisogno di denaro, i banchieri *riscontano* presso di esse gli effetti in portafoglio.

Il prospetto che dimostra il calcolo dello sconto e le condizioni a cui vien fatto si dice: *Distinta di sconto.*

BANCA DI CREDITO AGRICOLO E COMMERCIALE

. . . 4 Ottobre 1916.

Distinta degli effetti scontati al sig. N. N.

N.	Importo	OBBLIGATO	PIAZZA	Perdita di piazza	Scadenza	Giorni	Numeri
	200,—	Davit	Torino		16 ott.	13	(1) 36
	1471,85	Bonafede M.	Valenza Po		18 dic.	76	1118
	870,—	Caldarelli E.	Spoleto		15 genn.	104	905
	525,50	Monastier	Oulx	1 ‰	17 genn.	106	557
	3067,35						2616
		Sconto 5 % su N. $\frac{2616}{72}$ = 36,33					
		Perd. di piazza 1 ‰ s/ 525,5 0,53					
	36,86				36,86		
	3030,49	Netto Ricavo					

(1) Numero corrispondente allo sconto minimo di 0,50 per il tasso 5 %.

97. ***Tasse di bollo su effetti cambiari.*** — Per le *cambiali* e *fatture* accettate con obbligo di pagamento (dal 1° gennaio 1917):

fino a L. 100, L. 0,10;
oltre, fino a L. 1000, L. 0,10 ogni L. 100 o frazione di L. 100;
oltre, fino a L. 5000, L. 0,50 ogni L. 500 o frazione di L. 500;
oltre per ogni L. 1000 o frazione di L. 1000, L. 1.

Per le cambiali con scadenza superiore a 6 mesi e per quelle in bianco le precedenti tasse sono raddoppiate. Per le cambiali pagabili all'estero, e quelle provenienti dall'estero in quanto siano assogettate a corrispondente tassa di bollo nel paese d'origine, le tasse di cui sopra sono ridotte a metà.

Ad esse si aggiunge la tassa fissa di quitanza di L. 0,10.

Le copie ed i duplicati pagano come la prima di cambio fino al massimo di L. 2,10.

Gli *assegni semplici* sono soggetti a tassa fissa di L. 0,20, compresa la quitanza.

Gli *assegni circolari* delle ditte bancarie private ed i vaglia degli istituti di emissione non sono sottoposti a tasse di bollo.

Ogni girata, esclusa la prima e tutte quelle per incasso sulle cambiali è soggetta ad una tassa di bollo di 0,10 fino a L. 500 ed alla tassa graduale di bollo delle quitanze ordinarie:

fino a L. 1000 L. 0,20
» » 5000 » 0,30
» » 10000 » 0,40
oltre » 0,50.

CAMBIALE TRATTA - RECTO

Alessandria, 14 gennaio 1917 B. P. L. 875

A *trenta giorni vista* pag*ate* per questa cambiale al sig. *Livio Pivano* la somma di *L.it ottocentosettantacinque*

Bollo 0,90 + 0,10

Al sig. Ferruccio Boffi *Romeo Colombani*
Via Cavour - Alessandria 20 gennaio 1917 F. Boffi

Al bisogno presso Giuseppe Parini
Via Alessandro III - Alessandria

VERSO

Livio Pivano

E PER ME
ALLA SPETTABILE BANCA
INDUSTRIALE LOMBARDA
SEDE DI ALESSANDRIA
V. P. Del Corno

10 febbraio 1917.

Per quitanza
B.CA IND. LOMB.
IL CASSIERE
Gonella

ASSEGNO CIRCOLARE

CAPITOLO UNDICESIMO.

DEL CAMBIO

98. — Si supponga di avere un debito di un dato importo da pagarsi in un certo giorno in un certo luogo. Avremo estinta la nostra obbligazione quando il creditore nel giorno e luogo assegnato avrà riscosso per nostro conto una somma uguale a quella dovutagli, qualunque sia la via da noi seguita per fargli fare quella esazione. Cosicchè noi potremmo *spedire delle merci od altri valori* in quantità tale che da lui o da altri venduta produca un ricavo netto dell'importo e della valuta del debito (in particolare, del metallo oro od argento monetato o non); oppure *cedergli dei crediti nostri* sulla sua piazza e sempre sotto le ripetute condizioni. È certo che questi modi di pagamento ci costeranno somme differenti: dividendo ciascuna di esse per l'importo nominale del nostro debito troveremo differenti *parità pratiche* della moneta in cui il debito è espresso, *pagato in quelle determinate vie.*

Supponiamo di avere un credito in una data moneta riscuotibile presso il domicilio del debitore in un certo giorno. Noi non potremo pretendere altro da lui, cioè il nostro credito sarà per lui estinto, quando, nel giorno e nel luogo indicato, il debitore terrà a nostra disposizione o pagherà per nostro ordine e conto quella determinata somma. Potremo ordinargli di *acquistare merci od altri valori* e rimetterle a noi o ad altri per nostro conto (in particolare oro ed argento monetato o non)

in quantità tale che gli costi in tutto quella certa somma con quella valuta; oppure *cedere il nostro credito ad altri*. Questi varî modi di riscuotere crediti saranno variamente fruttiferi e l'importo del netto ricavo delle ricchezze ricevute o quello dei crediti accesi o dei debiti estinti colla cessione rappresenterà *differenti parità pratiche* della moneta in cui è espresso il credito per quel dato luogo, *secondo i differenti modi di riscossione* (1).

La semplicità ed il rischio dei modi di riscuotere e pagare sono pure da tenere in considerazione. Così i *singoli individui* difficilmente ricorreranno all'invio di merci che richiedono spese portano un rischio per le oscillazioni dei prezzi, causano perdite di tempo e di interessi; più facilmente alla spedizione di valori mobiliari per i quali i suddetti inconvenienti sono attenuati, e più ancora alla spedizione di metallo oro od argento. Ma le spese e gli inconvenienti minimi si hanno, in circostanze ordinarie, colla cessione dei crediti.

Nell'interno di ogni stato moderno, economicamente bene organizzato, vi hanno mezzi poco o nulla costosi per la cessione dei crediti, per es.: vaglia e chèques postali, assegni o vaglia delle banche principali, cambiali commerciali, od anche, urgendo,

(1) Qualunque sia il modo di pagamento considerato, si dovrà determinare:

1°. La *quantità* della cosa che deve essere spedita al creditore. Essa, per la parte che è debitrice o creditrice in moneta propria, deve corrispondere ad un costo o ricavo fisso, perciò sono elementi di calcolo: *a*) il prezzo e le condizioni di acquisto (o di vendita) sul suo mercato; *b*) le *spese* che aumentando il prezzo d'acquisto riducono, o riducendo il ricavo aumentano la quantità;

2°. Il *ricavo* (*o costo*) della quantità spedita per quella delle parti che è creditrice o debitrice in moneta estera. Ne sono elementi: *a*) il prezzo di vendita (o d'acquisto) sul suo mercato; *b*) le spese che riducono il ricavo od aumentano il costo.

Le spese sono, generalmente, provvigioni ad intermediarî, trasporti, assicurazioni, interessi perduti tra la valuta dell'acquisto e quella della vendita.

Gli elementi che compongono le parità pratiche possono essere nello stesso momento diversi per diversi operatori, e sono mutabili col tempo, le parità sono quindi diverse, anche per lo stesso modo di pagamento, e mutevoli.

invece di ordini scritti da trasmettersi per posta, come i precedenti, ordini telegrafici. Coll'estero il mezzo fondamentale è la *cambiale* con firme di primo ordine, gli chèques delle banche e gli ordini telegrafici sono dei surrogati in speciali circostanze, i vaglia postali servono per importi limitati e sono costosi. Tutta la nomenclatura relativa ai pagamenti all'estero risente della preponderanza della cambiale.

Una persona creditrice all'estero in moneta estera potrà: fare una tratta sul debitore e venderla sulla sua piazza, generalmente ad una banca; oppure ordinare al debitore di acquistare e rimettergli cambiali in moneta determinata (del creditore od altra) di costo uguale al debito.

Una persona debitrice all'estero in moneta estera potrà: comperare e rimettere cambiali di importo e scadenza come il debito od equivalenti, od in altra moneta; oppure ordinare al creditore di fare tratta sul debitore o su altri per conto di questi, per un importo che dia un ricavo eguale al credito. Le ditte bancarie accentrano il movimento di questi effetti ed utilmente, perchè siccome gli effetti hanno importi e scadenze diversissimi e difficilmente si può trovarne uno che corrisponda alle esigenze del cliente compratore, le banche spiccano e vendono chèques e tratte sui corrispondenti esteri e mandano loro come *copertura* gli effetti che non possono vendere o di prossima scadenza.

99. — Il prezzo a cui le banche comprano e vendono effetti in moneta estera, astrazion fatta dalla loro scadenza, ben raramente coincide colla parità teorica di quella moneta, cioè *alla pari*, normalmente è *sopra* o *sotto la pari* e le sue variazioni sono dovute a quelle della domanda e dell'offerta.

In condizioni normali del commercio internazionale esistono stretti limiti alle oscillazioni del prezzo di questi effetti. In generale la parità pratica della moneta estera pagata o riscossa con un dato mezzo B rappresenta un *punto* che la parità (costo o ricavo) di un mezzo A dapprima più conveniente non può oltrepassare nelle sue oscillazioni, senza che questo fatto non significhi il sollecito abbandono di A e l'adozione dell'altro B diventato più conveniente. Dopo l'uso delle cambiali il più

comodo ed economico modo di pagamento o di riscossione è l'uso del metallo monetato e non monetato, salvo rari casi; così il costo di un pagamento con esportazione di metallo rappresenta il prezzo massimo delle cambiali estere — *punto metallico di esportazione* — ed il ricavo di una riscossione con importazione di metallo rappresenta il minimo prezzo delle cambiali — *punto metallico di importazione*. Se il prezzo supera il punto di esportazione o scende al disotto di quello di importazione si ha rispettivamente uscita od entrata di metallo.

Questi punti sono generalmente *Gold points* perchè l'ufficio di moneta internazionale è quasi ovunque fatto dall'oro (1).

In condizioni eccezionali, perturbazioni commerciali o politiche, guerre, divieti di esportazione dell'oro, ecc., i punti metallici sono superati e non hanno più importanza.

La domanda e l'offerta delle cambiali dipende dai debiti e crediti coll'estero o, come si dice, dalla *bilancia dei pagamenti*. Questa a sua volta dipende da molte cause: importazione ed esportazione di mercanzie, noleggio di navi, movimento di capitali da un paese all'altro (per es.: prestiti all'estero, pagamento di interessi su debiti fatti all'estero, ecc.) ed è influenzata notevolmente dal *credito* (sono infatti i pagamenti che si *devono fare* ed i *crediti* che si *vogliono realizzare* che influiscono sul corso dei cambi).

(1) I punti metallici sono casi particolari delle parità pratiche già definite, le loro particolarità dipendono dal mercato speciale di cui sono oggetto i metalli nobili, e dal fatto che essi sono materia prima per la fabbricazione delle monete.

Riguardo al *prezzo* può avvenire per una o per entrambe le piazze:

1°. Che il metallo scelto *sia mezzo legale effettivo di pagamento*, cioè che monete con esso coniate siano in circolazione e alla pari, e

a) che la partita sia costituita da monete legali a giusto peso. Allora il prezzo da considerare è la parità legale fissa;

b) che la partita sia costituita da metallo non monetato o di monete non aventi valore legale perchè di altro sistema o di peso non giusto. Il prezzo può essere quello della zecca o quello di mercato (entro il limite del diritto di conio).

2°. Che il metallo *non sia mezzo legale effettivo di pagamento* o perchè il sistema è su altra base od esiste il corso forzoso del biglietto di banca o di moneta divisionaria, oppure la coniazione non è libera ma riservata allo Stato. Il prezzo è quello di mercato.

Certe piazze quotano separatamente lo *chèque* (1) e taluna i *versamenti telegrafici* (t. t. o c. t. - cable transfers, per piazze lontane o d'oltre mare). Colle indicazioni *lettera* e *denaro* si distinguono i corsi voluti dal venditore e dal compratore rispettivamente.

100. — I corsi possono essere indicati in due modi, secondo le consuetudini della piazza *quotatrice* o *calcolatrice*.

Nel primo, più diffuso, analogo a quello per le merci, il *corso indica il costo o prezzo variabile in moneta nazionale a pronti, corrispondente ad un credito di importo fisso in moneta estera con determinata scadenza*. Le piazze che quotano così le altre si dice che *danno loro l'incerto*, elitticamente, invece di dire: pagano o danno un prezzo variabile *incerto*, per cambiali estere di importo fisso, *certo*. Per es. Sia il cambio Italia Olanda 250, *3 mesi*. L'Italia dà l'incerto a tutte le piazze, perciò quel corso significa che L. 250 a pronti sono il prezzo di una cambiale di *fl* 100 sull'Olanda, e scadente fra 3 mesi.

Nell'altro modo, il *corso indica l'importo variabile in moneta estera di un credito con scadenza determinata, di prezzo fisso in moneta nazionale a pronti*. Le piazze che seguono questa via si dice che *danno il certo* alle altre, elitticamente, invece di dire che pagano o danno un prezzo fisso *certo* per una cambiale estera di importo variabile *incerto*.

Per es. Londra dà il certo a tutte le piazze eccettuate Pietroburgo, New-York, Lisbona, Madrid, Colonie inglesi. Se il corso su Kopenagen è 18,48 a *3 mesi* ciò significa che una cambiale di *Kr* scandinave 18,48 scadente fra 3 mesi costa a Londra una lira sterlina a pronti.

Si osservi che i termini fissi dei cambi sono sempre sottintesi — per trovarli basta pensare alle parità monetarie — la scadenza che segue il corso si riferisce alla moneta estera, la moneta nazionale è sempre a pronti (2).

(1) Specialmente per effetti sulla Gran Bretagna dove le cambiali hanno diritto a 3 giorni di dilazione (di grazia) per il pagamento, e lo chèque a nessuno.

(2) Sull'origine delle due usanze nella quotazione dei cambi, nota il Courcelle-Seneuil, *Traité des opérations de Banque* 1909, pag. 615:

Per intendere completamente il significato dei corsi de i cambi occorre conoscere gli usi delle diverse piazze intorno alle spese di negoziazione, al modo di calcolare lo sconto, a carico di chi è posta la spesa di bollo degli effetti, ai varî requisiti di somma e di scadenza che essi devono presentare.

101. — I *corsi del cambio*, cioè i numeri che indicano il valore delle cambiali in moneta estera, non possono essere tanti quante le possibili combinazioni dei differenti importi e scadenze È facile vedere tuttavia che il valore degli effetti è proporzionale al loro importo, astrazione facendo della scadenza, e che quindi un *corso* basta per tutti gli effetti di data scadenza; il valore degli effetti di uguale importo dipende dalla scadenza e dal tasso di sconto, *e solo* da questi elementi se non vi sono cause speciali che facciano offrire o domandare piuttosto cambiali a breve che a lunga scadenza.

Nei calcoli sui corsi dei cambi *per convenzione* si usa, *salvo poche eccezioni*, lo *sconto ufficiale* della piazza su cui l'effetto scade, ma è utile la conoscenza dello sconto *fuori banca* perchè ad esso vengono effettivamente scontate le cambiali che non hanno prossima scadenza, quando giungono sulla loro piazza.

Le differenze tra lo sconto estero fuori banca e quello ufficiale e fra questo ed il nazionale influiscono sulla domanda e sull'offerta di *carta estera* ad una piuttosto che ad un'altra scadenza.

Infatti: se il tasso estero *f. b.* è minore dell'ufficiale, un creditore verso l'estero ha interesse a convenire la conversione a breve scadenza al tasso *f. b.* del suo credito, piuttosto che trarre lungo e scontare al tasso ufficiale — *offerta di breve*; un debitore ha interesse a convertire a lunga scadenza perchè paga lo sconto *f. b.* e comperando *carta lunga* gode dello sconto ufficiale — *domanda di carta lunga*; se lo sconto *f. b.* è maggiore dell'ufficiale, il creditore concedendo proroghe al pagamento gode il *f. b.* e traendo lungo perde lo sconto ufficiale minore — *offerta di lunga*; il debitore pagando sollecitamente gode il *f. b.*, mentre comprando carta lunga godrebbe solo l'ufficiale, minore — *domanda di breve.*

« Autrefois ces rapports, fixés par d'anciens usages, étaient tels qu'en général les monnaies les plus vieilles, les plus anciennement connues, donnaient le certain aux plus modernes. Aujourd'hui, on prend presque toujours pour terme fixe, pour certain, celle des deux monnaies dont la valeur est la plus élevée, parce qu'il est ainsi plus facile de constater et de suivre les plus petites variations du change ».

Debitori e creditori devono pure tener conto del tasso che possono godere o devono pagare sulla moneta nazionale, cioè del tasso nazionale di sconto, e così pure le banche. In generale, un aumento del tasso nazionale di sconto offrendo migliori impieghi alla moneta nazionale, spinge alla realizzazione dei crediti esteri e fa quindi diminuire il prezzo delle divise estere; una diminuzione produce un effetto contrario.

Per tali ragioni i *listini dei cambi* delle principali piazze cambiarie indicano due (e qualcuno più di due) corsi dei cambi sulla medesima piazza, a seconda che si tratta di *carta o divisa breve*, o di *carta o divisa lunga*. La prima ha scadenza inferiore ad un mese, l'ultima da due a tre; per altre scadenze i contraenti vengono ad accordi.

102. *Calcoli sulla negoziazione delle divise estere.* — Indichiamo con C l'importo in moneta estera del credito (effetto) di scadenza S_c comperato o venduto; con N ed E i termini del corso del cambio sulla piazza di scadenza, rispettivamente in moneta nazionale (prezzo) ed in moneta estera (credito); con S_E la scadenza di E cioè la scadenza del cambio; con n la differenza $|\ S_E - S_c\ |$.

Quando è $S_E \neq S_c$ facciamo la *convenzione di scontare sempre la somma di scadenza maggiore* e di *usare solo lo sconto commerciale.*

Possiamo avere i seguenti casi:

1) $S_E = S_c$. Il costo o ricavo in moneta nazionale sarà

$$R = C\,\frac{N}{E}$$

2) $S_E > S_c$

$$R = C\,\frac{N}{E(1 - r\,n)}$$

3) $S_E < S_c$

$$R = C(1 - r\,n)\,\frac{N}{E}$$

I cambi essendo quotati prendendo per termine fisso 1, 10 o 100 unità di moneta, possiamo considerare il *corso unitario* del cambio, che sarà espresso per i corsi quotati dando l'incerto da $\left(\frac{N}{E}\right)$ e per gli altri da $\left(\frac{E}{N}\right)$. Abbiamo quindi

per i cambi quotati dando

	a) *l'incerto*	b) *il certo*
1) $S_E = S_c$	$R = C\left(\frac{N}{E}\right)$	$R = \frac{C}{\left(\frac{E}{N}\right)}$
	si moltiplica l'importo della cambiale per il corso unitario del cambio	*si divide l'importo della cambiale per il corso unitario del cambio*
2) $S_E > S_c$	$R = C\frac{\left(\frac{N}{E}\right)}{1 - r\,n}$	$R = \frac{C}{\left(\frac{E}{N}\right)(1 - r\,n)}$
3) $S_E < S_c$	$R = C(1 - r\,n)\left(\frac{N}{E}\right)$	$R = \frac{C(1 - r\,n)}{\left(\frac{E}{N}\right)}$

103. — Nel calcolare queste formule si possono fare *prima* le operazioni indicate:

1° sul fattore di sconto $(1 - n\,r)$ e su C. Si dice allora che si *livella l'effetto*. Si può osservare che il calcolo è uguale per le due specie di quotazioni, e precisamente: se si deve abbassare la scadenza di C si moltiplica per $(1 - r\,n)$, se si deve aumentare si divide C per $(1 - r\,n)$;

2° sul fattore di sconto $(1 - r\,n)$ e sul corso del cambio ( ). Si dice allora che *si livella il cambio*. Il calcolo è diverso per le due specie di quotazioni e precisamente:

a) per i cambi quotati dando l'incerto: dovendo *abbassare la scadenza* del cambio si divide il corso per il fattore di sconto (che è < 1), e quindi si *aumenta il cambio*; dovendo *aumentare la scadenza* si moltiplica il corso per il fattore di sconto, cioè si *diminuisce il cambio*. Si può dire: le *correzioni del corso sono di segno contrario alle variazioni di scadenza*. A questa conclusione si può arrivare ragionando così: il corso esprime il costo di un credito di una moneta estera, se la scadenza della moneta estera aumenta, il suo valore presente, e quindi il suo costo, cioè il cambio, diminuisce; inversamente se la scadenza diminuisce;

b) per i cambi quotati dando il certo: dovendo *abbassare la scadenza* del cambio si moltiplica il corso per il fattore di sconto, e quindi si *diminuisce il cambio*; dovendo *aumentare la scadenza* si divide per il fattore di sconto cioè si *aumenta il cambio*.

Si può dire: le *correzioni del corso sono dello stesso segno delle variazioni di scadenza*. Infatti: il corso esprime l'importo in moneta estera di un credito di costo fisso 1, se la scadenza del credito aumenta, per conservare immutato il suo costo deve aumentare di importo, il quale è il corso del cambio; inversamente se la scadenza diminuisce;

3° sull'importo dell'effetto e sul corso del cambio. Si dice allora che si *calcola sul nominale*. Dapprima si suppone siano uguali le due scadenze, poi si opera col fattore di sconto sul risultato, come nel livellamento dell'effetto.

Sulla maggiore convenienza relativa dei vari modi di calcolare si può dire ben poco: in generale è da preferirsi per i cambi quotati dando l'incerto, il calcolo sul nominale (specialmente se il cambio unitario è molto alto) e per i cambi quotati dando il certo, il livellamento dell'effetto; invece di dividere per il fattore di sconto usare il procedimento indicato al n. **4**, formula 3').

Esempi. Senza tener conto delle spese.

Si vende ad Amsterdam un effetto di fr. svizzeri 3000 a 27 *g. Cambio sulle Piazze Svizzere* 48,125 ad 8 *g. Sconto* 4 %.

Livellamento dell'effetto.

Si sconta per $27 - 8 = 19$ *g*.

4 % *D* 9000.

g 9	*fr* 3	*fr* 27 *g* 3000	
9	3	— sconto 19 *g*	6,33
1	0,333	*fr* 8 *g*	2993,67
g 19	*fr* 6,333		

$$\frac{48{,}125 \cdot 2993{,}67}{100} = fl\ 1440{,}70$$

Livellamento del cambio.

Si sconta per $27 - 8 = 19$ *g* come sopra.

g 9	*fl* 0,048125		
9	0,048125	cambio 8 *g*	48,125
1	0,005347	— sconto 19 *g*	0,1016
g 19	*fl* 0,101597	cambio 27 *g*	48,0234

$$\frac{48{,}0234 \cdot 3000}{100} = fl\ 1440{,}70$$

calcolo sul nominale

$$\frac{48{,}125 \cdot 3000}{100} = fl\ 1443{,}75$$

si sconta il prodotto per 19 giorni

g 9	*fl* 1,4437		
9	1,4437	*fl*	1443,75
1	0,1604	— sconto	3,05
g 19	*fl* 3,0478	*fl*	1440,70

Si compera ad Amsterdam un effetto di L. 2400 a 20 g. Cambio sull'Italia 46,50 3 m. 5 %.

(Da 20 *g* a 3 *m* *g* 70; 5 % *D* 7200).

Livellamento dell'effetto.

Aggiungiamo lo sconto — approssimato.

g 72	*L* 24	0,2333	
g 36	*L* 12	0,1166	
24	8	0,0777	
6	2	0,0194	*L* 23,33
4	1,33	0,0129	+ 0,23
g 70	*L* 23,33	0,2266	*L* 23,56 Sconto

L 2400 a 20 *g*

\+ 23,56 sconto 70 *g*

L 2423,56 a 3 mesi

$$\frac{46{,}5 \cdot 2423{,}56}{100} = fl\ 1126{,}95$$

Livellamento del cambio.

Aggiungiamo al cambio lo sconto, colla formula

$$\frac{46{,}5}{1 - \frac{0{,}5}{360} \cdot 70} = \frac{46{,}5}{0{,}990277} = 46{,}9565$$

$$\frac{46{,}9565 \cdot 2400}{100} = fl\ 1126{,}95.$$

Calcolo sul nominale.

$$\frac{46{,}5 \cdot 2400}{100}\ fl\ 1116.$$

Si aggiunge al risultato lo sconto per 70 *g*.

$$1116 : 0{,}990277\ldots = fl\ 1126{,}95.$$

A Londra si negoziano fl 2700 a 15 g. Cambio su Amsterdam 12 vista 4 %.

Livellamento dell'effetto.

Si sconta per 15 *g*. 4 % *D* 9000.

g 90	*fl* 27	*fl* a 15 *g*	2700
g 15	*fl* 4,5	— sconto 15 *g*	4,5
		fl a vista	2695,5

$$\frac{2695{,}5}{12} = Lst\ 224\ 12\,s\ 6\,d$$

Livellamento del cambio.

Si aggiunge lo sconto per 15 *g*.

g 90	0,12	0,0002
g 15	0,02	0,000033...

cambio a vista *fl* 12

sconto 15 *g* 0,020033...

cambio a 15 *g* *fl* 12,020033...

$$\frac{2700}{12{,}020033} = Lst\ 224\ 12\,s\ 6\,d.$$

A Londra si vendono Kr 3200 a 65 g su Kopenagen a 18,38, 3 m 4 %.

(Da 65 *g* a 3 *m* *g* 25; 4 % *D* 9000).

Livellamento dell'effetto.

Si aggiunge lo sconto per *g* 25.

g 90	*Kr* 32	0,08888
g 10	*Kr* 3,5555	0,00987
10	3,5555	0,00987
5	1,7777	0,00493
g 25	*Kr* 8,8888	0,02467

Kr 8,8888
\+ 0,0246
Kr 8,9134 sconto

Kr 65 *g* 3200
\+ sconto 25 *g* 8,91
Kr 3 *m* 3208,91

$$\frac{3208{,}91}{18{,}38} = \textit{Lst}\ 174\ 11\ s\ 9\ d$$

Livellamento del cambio.

Si sconta per 25 giorni.

g 90	*Kr* 0,1838	cambio 3 *m* *Kr* 18,38
g 10	*Kr* 0,02042	— sconto 25 *g* 0,0511
10	0,02042	
5	0,01021	cambio 65 *g* *Kr* 18,3289
g 25	*Kr* 0,05105	

$$\frac{3200}{18{,}3289} = \textit{Lst}\ 174\ 11\ s\ 9\ d$$

104. *Col calcolo delle spese.* — Se negli esempi precedenti, a carico di una delle parti contraenti stavano delle spese, provvigioni, bollo e simili, i risultati ottenuti dovevano essere aumentati o diminuiti dell'importo di esse, a seconda che si trattava di costo o di ricavo. Il calcolo non presenta nessuna difficoltà. L'operatore vendeva o comperava una *data quantità di moneta estera*, ottenendo un risultato più o meno favorevole secondo il corso dei cambi e le spese a suo carico. Supponiamo invece di avere un debito o credito verso l'estero, *ma in moneta nostra*. La nostra spesa od il nostro ricavo non devono essere di importo diverso; possiamo perciò, a questa condizione, lasciare al corrispondente la scelta del modo di pagamento. Il calcolo delle spese richiede speciale considerazione.

Esempio. Si devono a pronti Lit 2000 *a Londra, e rimettiamo, conforme all'ordine, uno chèque su Londra a* 30 *vista, pagando il bollo, e provvigione* $^1/_4$ $^0/_0$. *Determiniamo l'importo dello chèque.*

Lit 2000
— bollo 0,20
1999,80

questa somma rappresenta il costo dello chèque più la provvigione 0,25 per 100; essa perciò corrisponde a 100,25 di cui 0,25 provvigione: quindi

$$100{,}25 : 1999{,}8 = 0{,}25 : x$$
$$x = 4{,}98$$

perciò — provvigione 4,98
L. 1994,92

che al cambio di 30 corrispondono a *Lst* 66.9 *s* 10 *d*.

Infatti: Lst 66 9 *s* 10 *d* = *Lst* 66,494
ed a 30 *Lit* 1994,82
\+ provvigione $^1/_4$ $^0/_0$ 4,98
\+ bollo 0,20
Lit 2000,—

Essendo creditori di L. 2400 *facciamo tratta in fl, conforme agli ordini, cambio* 250, *spese* $^1/_4$ $^0/_0$, *bollo cambiario. Troviamo l'importo della tratta.*

L. 2400
\+ bollo 1,25
2401,25

questa somma rappresenta il ricavo, netto della provvigione, che va calcolata in 0,25 per 100 sul ricavo lordo: essa corrisponde ad un ricavo netto di 99,75 per 100 lordo, di cui 0,25 provvigione. Perciò

$$99{,}75 : 2404{,}25 = 0{,}25 : x$$
$$x = 6{,}02$$

\+ provvigione 6,02
L. 2407,27

che al cambio di 250 corrispondono a *fl* 9629,08.

Infatti: *fl* 9629,08 a 250 L. 2407,27
— provvigione $^1/_4$ $^0/_0$ 6,02
L. 2401,25
— bollo 1,25
L. 2400,—

Londra deve Lst 220 16 *s a pronti, e compera per ordine, carta 1 mese su Amsterdam a* 12 *vista*, 4 $^0/_0$. *Spese* $^1/_2$ $^0/_0$. *Determiniamo l'importo della rimessa.*

	Lst	220	16 *s*
— bollo			3
	Lst	220	13 *s*

questa somma comprende anche la provvigione calcolata sul costo dell'effetto in ragione di 0,5 per 100; essa corrisponde quindi ad un costo e spese di 100,5 per 0,5 di provvigione

(*Lst* 220 13 *s* = *Lst* 220,65)
100,5 : 220,65 = 0,5 : *x*
x = *Lst* 1 1 *s* 10 *d*

— provvigione	*Lst*	1	1 *s*	11 *d*
	Lst	219	11 *s*	1 *d*

che al cambio di *fl* 12 ***vista*** corrispondono a *fl* 2634,65 ***vista***. Per portarli ad *1 mese* aggiungiamo lo sconto (4 %).

g. 90	*fl* 26,346	*fl* 0,08782
g 30	*fl* 8,782	*fl* 0,02927

fl 8,782	*fl* 2634,65 vista
+ 0,029	+ 8,81 sconto 1 mese
fl 8,811 sconto	*fl* 2643,46 ad 1 mese

Infatti:

fl 1 mese	2643,46
— sconto 4 %	8,81
fl vista	2634,65

che al cambio di *fl* 12 per *Lst* corrispondono a	*Lst*	219	11 *s*	1 *d*
+ provvigione ½ %		1	1	11
+ bollo		—	3	—
	Lst	220	16 *s*	—

Si ha un credito di L. 6000 a 2 mesi. ***Si conviene col debitore di trarre frs a*** 2 mesi, ***accordando un interesse del*** 5 %. ***La tratta viene venduta a*** 109 ***vista*** 4 %; spese ½ %. ***Determiniamo l'importo della tratta.***

Credito a 2 mesi L. 6000
— interessi 5 % sul valore attuale

$$\frac{6000 \cdot 0{,}05 \cdot 2}{12 + 0{,}05 \cdot 2} = 49{,}59$$

	49,59
credito a vista L.	5950,41
+ bollo della tratta	3
L.	5953,41

questa somma non comprende la provvigione del ½ % sul costo della rimessa; essa corrisponde a 99,5 per 100 di costo, di cui 0,5 provvigione. Perciò

99,5 : 5953,41 = 0,5 : *x*
x = L. 29,92

+ provvigione	29,92
L.	5983,33

che al cambio di 109 ***vista*** corrispondono a *frs vista* 5489,29
+ sconto 4 % per 2 mesi 36,84
importo della tratta a *2 mesi frs* 5526.13

Infatti:

Importo della tratta *frs*	5526,13
— sconto 4 % *2 mesi*	36,84
frs a vista	5489,29
che al cambio di 109 ***vista*** danno L. a pronti	5983,33
— spese provvigione ½ % L. 29,92	
bollo 3	32,92
netto ricavo a pronti L.	5950.41
+ interessi 5 % per 2 mesi	49,59
credito a 2 mesi L.	6000.00

Londra deve a Cristiania Lst 400 10 *s a 2 mesi, e rimette subito carta ad 1 mese, ottenendo un interesse del* 3 %, *al cambio di* 18,3 *3 mesi* 4 %. ***Provvigione 1 %o. Troviamo l'importo della rimessa.***

Debito a 2 mesi *Lst* 400 10 *s* —
— interesse 3 % sul valore attuale

$$\frac{400{,}5 \,.\, 2 \,.\, 0{,}03}{12 + 2 \,.\, 0{,}03} = \textit{Lst}\ 1\ 19\ 10$$

	1	19	10
Lst	398	10	2
— bollo		4	
Lst	398	6	2

questa somma rappresenta il costo della rimessa più la provvigione su quel costo; essa corrisponde a 1001 per ogni 1000 di costo senza spese, od a 1001 per 1 di provvigione. Quindi (*Lst* 398 6 2 = *Lst* 398,308)

1001 : 398,308 = 1 : *x*
x = 7 *s* 11 *d*

— provvigione		7	11
Lst	397	18	3

che al cambio di 18,3 a *3 mesi* corrispondono a *Kr* 3 mesi 7281,79
— sconto 4 %, 2 mesi 48,55
importo della rimessa *Kr* 1 mese 7233,24

Infatti:

	Kr 1 mese	7233,24		
+ sconto per 2 mesi		48,55		
	Kr 3 mesi	7281,79		
che al cambio di 18,3 danno a pronti	*Lst*	397	18	3
+ spese provvigione 1 ‰	7 *s*	11 *d*		
+ spese bollo	4	—	11	11
	Lst	398	10	2
+ interesse 3 % 2 mesi		1	19	10
debito a 2 mesi	*Lst*	400	10 *s*	—

105. *Scelta fra la carta breve e la carta lunga.* — Nel riscuotere o nel pagare moneta estera la divisa può avere scadenza diversa dal credito o debito. Ogni differenza fra le due scadenze porta a due calcoli distinti, uno sull'importo del credito o debito, l'altro sul ricavo o costo dell'effetto.

Il primo calcolo è da farsi al tasso di sconto libero od a quello d'interesse dei depositi di denaro, il secondo al tasso ufficiale.

D'altra parte le divise con differenze notevoli di scadenza vengono negoziate a cambi differenti.

Se i due tassi od i due corsi o gli uni e gli altri non coincidono si offre alla parte debitrice o creditrice in moneta estera la possibilità di determinare, previo accordo coll'altra, la scadenza dell'effetto, in modo che il risultato rappresenti il massimo ricavo o la minima spesa, mentre la cosa risulti indifferente per l'altra parte.

Potendo operare per tratta o per rimessa si devono considerare i cambi della piazza dell'arbitratore e quelli della piazza del corrispondente.

Consideriamo separatamente: *a*) le conseguenze della diversità dei tassi, *b*) quelle della diversità dei corsi.

a) *Se l'arbitratore eseguisce lui*, comprando o vendendo sulla sua piazza, lo sconto ufficiale gli riduce il costo delle rimesse od il ricavo delle tratte cioè agisce in senso contrario alle variazioni di scadenza, mentre lo sconto libero agisce nello stesso senso di quelle variazioni. Così

il creditore (tratta)	*il debitore* (rimessa)
aumentando la scadenza	
1) guadagna lo sconto libero perde lo sconto banca	2) perde lo sconto libero guadagna lo sconto banca
diminuendo la scadenza	
3) guadagna lo sconto banca perde lo sconto libero	4) perde lo sconto banca guadagna lo sconto libero

Facendo eseguire dal corrispondente si nota che lo sconto ufficiale (della piazza dell'arbitratore) riduce il costo delle rimesse ed il ricavo delle tratte, ma siccome la spesa od il ricavo devono essere per lui fissi, produce un aumento dell'importo delle rimesse e delle tratte, agisce cioè nello stesso senso delle variazioni di scadenza; mentre lo sconto libero (o l'interesse) sulla piazza dell'arbitratore rappresenta il frutto a cui questi rinuncia o di cui gode per le variazioni di scadenza della spesa o del ricavo, ed agisce in senso contrario alle variazioni di scadenza. Così

il creditore (rimessa)	*il debitore* (tratta)
aumentando la scadenza	
5) perde lo sconto libero guadagna lo sconto banca	6) guadagna lo sconto libero perde lo sconto banca
diminuendo la scadenza	
7) guadagna lo sconto libero perde lo sconto banca	8) perde lo sconto libero guadagna lo sconto banca

Se i cambi breve e lungo sono ugualmente quotati, dal confronto tra i due prospetti si deduce la seguente regola, nella quale però sono trascurate le differenze che derivano dall'essere l'interesse e lo sconto calcolati su somme differenti.

Osservando 1 e 6; 3 ed 8:

la tratta conviene sia lunga quando lo sconto ufficiale sia minore del fuori banca.

Osservando 2 e 5; 4 e 7:

la rimessa conviene sia lunga quando lo sconto ufficiale sia maggiore del fuori banca.

b) Badando solo ai cambi, che si suppongono riferiti alla medesima scadenza, si vede subito che

se opera l'arbitratore

creditore (tratta)	*debitore* (rimessa)
1) gli conviene il cambio a prezzo più alto	2) gli conviene il cambio a prezzo più basso

se opera il corrispondente

(rimessa)	(tratta)
3) conviene il cambio a prezzo più basso	4) conviene il cambio a prezzo più alto

cioè, se i tassi iibero ed ufficiale sono uguali, coll'avvertenza precedente, si ha:

Osservando 1 e 4

conviene per la tratta il cambio a prezzo più alto.

Osservando 2 e 3

conviene per la rimessa il cambio a prezzo più basso (1).

c) Quando sono diversi i cambi ed i tassi di sconto, occorre calcolare il risultato per ogni possibile via.

Esempi.

Amsterdam deve a Londra Lst a pronti. Conviene rimettere carta breve a 12,11 $^1/_2$, ***8 giorni o carta lunga a*** 12,02 ***2 mesi?*** 4 %.

1° Modo.

Livelliamo il cambio a 2 mesi, $60 - 8 = 52$ *g* 4 % *D* 9000.

Cambio 2 mesi	12,02
+ sconto 52 *g*	0,07
cambio a vista	12,09

È più conveniente la rimessa *lunga*.

(1) Se i cambi sono quotati dando l'incerto la regola è letteralmente applicabile; per i cambi quotati dando il certo si deve intendere: per *prezzo più alto*, *corso più basso*, ed inversamente.

2° Modo.

Cambio a 8 giorni	12,115
» a 2 mesi	12,02
differenza per 52 giorni	0,095

Riportiamola ad anno ed a 100, invece che a 12,115.

$$\frac{0{,}095 \cdot 100 \cdot 360}{52 \cdot 12{,}115} = 5{,}423$$

Quella differenza corrisponde ad uno sconto del 5,423 %, invece del 4 %, conviene la carta per cui l'operatore gode di quell'alto sconto cioè la *lunga*.

Londra è creditrice di Parigi in Frs a vista. Conviene trarre a vista a 28,20 ***(chèque) o a 3 mesi*** 28,45 ***accordando il debitore l'interesse del*** 3 $^3/_4$ %?

1° Modo.

Ricavo per 100 *frs* di credito

$$\text{colla } \textit{breve Lst } \frac{100}{28{,}20}$$

$$\text{colla } \textit{lunga Lst } \frac{100\left(1 + 0{,}0375 \cdot \frac{3}{12}\right)}{28{,}45} =$$

$$= \textit{Lst } \frac{100}{28{,}45 : 1{,}009375} = \frac{100}{28{,}1856}$$

Conviene la *lunga*.

2° Modo.

Cambio a 3 mesi	28,45
» a vista	28,20
differenza su 28,45 per 3 mesi	0,25

Riferiamola a 100 e ad anno

$$\frac{0{,}25 \cdot 12 \cdot 100}{3 \cdot 28{,}45} = 3{,}514\ \%$$

Il creditore perde il 3,514 % e guadagna il 3,75 %.

Ma il 3,75 % è interesse, il 3,514 è sconto e non sono direttamente confrontabili. Il 3,514 è calcolato su 100 aumentato dell'interesse: dunque corrisponde al $3{,}514 \cdot 103{,}75 : 100 = 3{,}6458$.

Conviene la tratta *lunga*.

Parigi è creditore di Londra di Lst a vista e può trarre breve a 27 ***vista o lungo a*** 27,10 ***vista*** 5 %, ***accordando in questo caso al debitore una proroga di 3 mesi al*** 4 $^1/_2$ %.

Traendo breve, per *Lst* 100 ricava
Traendo lungo si ha *Frs* 2700,—

credito a vista *Lst* 100
+ interesse 4 1/2 per 3 mesi 1,125
importo effetto a 3 mesi *Lst* 101,125
— sconto ufficiale 3 mesi 5 % 1,26406
effetto ridotto a vista *Lst* 99,86094

che al cambio di 27,10 dà un ricavo di *Frs* 2706,23

Conviene la tratta a 3 mesi.

New-York deve a Londra Lst 260 ad 1 mese, e calcola quale via è più conveniente:

rimettere a vista a 4,75 1/2
rimettere a 60 giorni a 4,72 3/4

Londra accorda per l'anticipo il 4 1/4 %. *Sconto di banca* 4 1/2 %.

Colla breve.

Debito a 1 mese *Lst* 260 — —
— interesse 4 1/4 % sul valore attuale
$\frac{260 \cdot 0{,}0425 \cdot 1}{12 \cdot 0{,}0425 \cdot 1} = 18\,s\ 4\,d$
— 18 *s* 4 *d*
Debito a vista *Lst* 259 1 8

che al cambio di 4,755 corrisponde a $ 1231,93.

Colla lunga.

Debito a 1 mese *Lst* 260 — —
+ sconto 4 1/2 % per 1 mese
$\frac{260 \cdot 0{,}045 \cdot 1}{12 \cdot 0{,}045 \cdot 1} = 19\,s\ 5\,d$
19 *s* 5 *d*
Debito a 2 mesi *Lst* 260 19 *s* 5 *d*

che al cambio di 4,72 3/4 corrisponde a $ 1233,73.
Conviene la breve.

Altro modo.

Cambio a vista 4,755
» a 60 *g* 4,7275
differenza per 2 mesi 0,0275

Riferiamola ad anno ed a 100 invece che a 4,755:

$$\frac{0{,}0275 \cdot 12 \cdot 100}{2 \cdot 4{,}755} = 3{,}47\ \%$$

Così: *colla breve* si ha

un abbuono del 4,25
si perde 3,47
per anno, si guadagna 0,78 %

colla lunga si ha

un interesse di mora del 4,50
un guadagno del 3,47
si perde, per anno l' 1,03 %

106. *Scelta (arbitraggio) fra la tratta e la rimessa.* — Se l'operatore è debitore o creditore in moneta estera può scegliere la più conveniente fra la tratta o la rimessa.

1°. Supponiamo il debito o credito a pronta scadenza ed i cambi, della piazza dell'operatore e di quella del corrispondente, a *vista*.

Sia N il termine (variabile o fisso) espresso in moneta nazionale ed E quello (fisso o variabile) in moneta estera del cambio della piazza dell'arbitratore sull'altra; N' ed E' quelli analoghi del cambio della piazza del corrispondente sulla prima. Spesa o ricavo dell'arbitratore sono sempre nella sua moneta (della specie N ed E'), spesa o ricavo del corrispondente in moneta della sua piazza (della specie N' od E).

Sia l'arbitratore in debito di 1 moneta estera.

Rimettendo spenderà $\frac{N}{E}$.

Facendosi trarre dovrà estinguere una tratta che renderà al corrispondente il ricavo di 1 sua moneta, e perciò dell'importo $\frac{E'}{N'}$.

Converrà la tratta quando sarà $\frac{N}{E} > \frac{E'}{N'}$, cioè, trattandosi di quantità positive,

$$N N' > E E'.$$

Nel caso contrario converrà la rimessa.

Sia l'arbitratore in credito di 1 moneta estera.

Traendo avrà un ricavo $\frac{N}{E}$.

Se ordina al corrispondente di rimettere, l'effetto deve costare a questi 1 sua moneta ed avrà perciò l'importo $\frac{E'}{N'}$

Converrà la tratta quando sarà $\frac{N}{E} > \frac{E'}{N'}$ cioè

$$N N' > E E'$$

come sopra.

Sia l'arbitratore nè debitore nè creditore, ma voglia speculare sui cambi.

La speculazione consiste nel crearsi un credito in moneta estera, e riscuoterlo in modo da avere un netto ricavo superiore alla spesa sostenuta per crearsi il credito. Nell'ipotesi nostra, cioè di due soli cambi noti, se lo speculatore si crea il credito rimettendo, non può riscuoterlo traendo, perchè il cambio a cui vende la tratta è lo stesso al quale ha comprato la rimessa; deve dunque riscuotere pure per via di rimessa. Se prima si è fatto trarre, trarrà a sua volta sul corrispondente.

1°. Colla *tratta*. Ordina al corrispondente di trarre su di lui in modo da ricavare 1, e quindi la tratta da estinguere sarà di importo $\frac{E'}{N'}$. A sua volta farà tratta sul corrispondente in moneta estera, ricavando $\frac{N}{E}$. La speculazione darà utile se sarà

$$\frac{N}{E} > \frac{E'}{N'}$$

cioè

$$N N' > E E'$$

2°. Colla *rimessa*. Compra e manda al corrispondente un effetto di importo 1, spendendo $\frac{N}{E}$. Il corrispondente a sua volta compra e gli rimette un effetto di costo 1 e quindi di importo $\frac{E'}{N'}$.

La speculazione colla rimessa sarà buona se

$$\frac{N}{E} < \frac{E'}{N'}$$

cioè

$$N N' < E E'$$

Concludendo:

Se il prodotto dei termini di cambio espressi, **rispettivamente per ciascuna piazza,** *in moneta nazionale, è maggiore del prodotto dei termini espressi in moneta estera, converrà la tratta, sia per riscuotere che per pagare o per speculare; nel caso opposto, la rimessa* [1].

Se i cambi sono a scadenza, si riducono prima a vista, *scontando i termini in moneta estera.*

Esempî (*cambi a vista*).

Cambi: Londra-New-York 50 (*d* per $)
New-York-Londra 4,755 ($ per *Lst*, 240 *d*)

Per un operatore sia a Londra che a New-York

$$N N' = 50 \cdot 4{,}755 = 237{,}75$$
$$E E' = 1 \cdot 240 = 240$$

Conviene la rimessa.

Cambi: Amsterdam-Kopenagen 66,6
Kopenagen-Amsterdam 150,05

Per un operatore, sia a Kopenagen che ad Amsterdam

$$N N' = 66{,}6 \cdot 150{,}05 = 10020{,}33$$
$$E E' = 100 \cdot 100 = 1000$$

Conviene la tratta.

Cambi: Londra-Amsterdam 12
Amsterdam-Londra 12,05

Per un operatore sia a Londra che ad Amsterdam

$$N N' = 1 \cdot 12{,}05 = 12{,}05$$
$$E E' = 12 \cdot 1 = 12$$

Conviene la tratta.

---

[1] Tale regola — non colla presente generalizzazione — è dovuta ad H. Lefèvre, *Le change et la bourse*, 1889. Delagrave, Paris.

2°. Se il debito od il credito non è a pronta scadenza l'arbitraggio si fa col calcolo dei costi e dei netti ricavi che si hanno nelle due ipotesi, *riferendoli alla stessa scadenza* (per es. a quella del debito o credito in questione), tenendo conto degli interessi fra il momento in cui si paga o si riscuote, e quella scadenza comune.

107. *Osservazione.* — La regola precedente, trovata colla implicita supposizione di cambi *netti da spese*, vale, *quando si tratta di riscuotere o di pagare*, anche per cambi non netti, dopo che siano depurati delle spese, e quando sono dati due cambi per la stessa divisa, uno per l'acquisto e l'altro per la vendita.

Quando deve essere applicata ad un arbitraggio di speculazione la regola va un po' modificata.

Nel caso di acquisto (rimessa) i termini di cambio dovranno esprimere un prezzo maggiore; sarà sempre aumentato quello in moneta nazionale, almeno per le spese, e, nel caso del *certo*, anche diminuito quello in moneta estera.

Indichiamoli con $N_r\ E_r$ ed $N'_r\ E'_r$.

Converrà la rimessa se sarà

$$N_r\ N'_r < E_r\ E'_r.$$

Se la disuguaglianza non è verificata *non si può dedurre che convenga la tratta.* In caso di vendita (tratta) i cambi esprimono un ricavo minore; sarà sempre diminuito, almeno per le spese, il termine in moneta nazionale, e, nel caso del *certo*, anche aumentato il termine in moneta estera.

Indichiamoli con $N_t E_t$ ed $N'_t E'_t$.

Converrà la tratta solo se sarà

$$N\ N'_t > E_t E'_t.$$

Essendo sempre $N_r > N_t$, $N'_r > N'_t$, ed $E_r \leqq E_t$, $E'_r \geqq E'_t$ e quindi $N_r\ N'_r > N_t N'_t$ ed $E_r E'_r \leqq E_t E'_t$, le due disuguaglianze non possono essere contemporaneamente verificate, ma possono essere *contemporaneamente non verificate entrambe.* In questo caso la speculazione è impossibile.

Esempio: Supponiamo che i cambi, a vista, siano:

Amsterdam-Kopenagen: per la *vendita* 66,60
per la *compera* 66,625
Kopenagen-Amsterdam: per la *vendita* 150
per la *compera* 150,05

Spese, in ogni caso, 1 °/₀₀.

Calcolando le spese, i cambi diventano:

A. K. per la vendita $66{,}6 - 1\ °/_{00} = 66{,}5334\ \ N_t$
per la compera $66{,}625 + 1\ °/_{00} = 66{,}691625\ \ N_r$.

K. A. per la vendita $150 - 1\ °/_{00} = 149{,}85\ \ N'_t$
per la compera $150{,}05 + 1\ °/_{00} = 150{,}20005\ \ N'_r$.

Se *A deve* a *K* si adoprano i cambi: d'acquisto di *A* e di vendita di *K*.

$$N_r\ N'_t = 66{,}691625 \cdot 149{,}85 = 9993{,}74$$
$$E\ E' = 100 \cdot 100 = 10000\ (^1).$$

Conviene la *rimessa.*

Se *A* è *creditrice* di *K* si adoprano i cambi: di vendita di *A* e di compera di *K*.

$$N_t N'_r = 66{,}5334 \cdot 150{,}20005 = 9993{,}92$$
$$E\ E' = 100 \cdot 100 = 10000.$$

Conviene pure la *rimessa.*

Vediamo se Amsterdam può speculare.

Colla rimessa

$$N_r\ N'_r = 66{,}691625 \cdot 150{,}20005 = 10068{,}08$$
$$E\ E' = 100 \cdot 100 = 10000.$$

Colla rimessa non è possibile.

Colla tratta

$$N_t N'_t = 66{,}5334 \cdot 149{,}85 = 9970{,}03$$
$$E\ E' = 100 \cdot 100 = 10000.$$

Nemmeno colla tratta.

La speculazione è impossibile.

108. — Tratte e rimesse, nelle questioni precedenti, erano nella moneta della piazza del corrispondente e si aveva un solo corrispondente per ogni operazione di cambio. Le operazioni cosiffatte si dicono di *cambio diretto.*

Ma, se debitori, possiamo fare rimesse di effetti in moneta di una piazza diversa da quella a cui la rimessa viene fatta, oppure; anche se creditori, usare dei servizi di corrispondenti di una o più altre piazze facendo loro e facendo loro eseguire rimesse e tratte, combinate in tal modo da produrre l'esazione del credito od il pagamento del debito nella sua somma e scadenza.

Queste operazioni in cui entrano in considerazione più di due piazze si dicono di *cambio indiretto.*

---

(1) Le due piazze si danno l'incerto e perciò i termini in moneta estera sono costanti.

La spedizione di carta su una terza piazza (*piazza intermediaria*) o *rimessa di carta indiretta*, può essere un componente dell'intera operazione di cambio indiretto, ma questo può constare di operazioni che, singolarmente considerate, sono di cambio diretto.

La *rimessa di carta indiretta* richiede la conoscenza di due cambî, uno della piazza dell'operatore l'altro di quella del corrispondente, *entrambi verso l'intermediaria.*

Esempio: Si vuol pagare a Londra con carta su Amsterdam. I cambi a vista ed il debito a pronta scadenza.

Italia Amsterdam 256
Londra Amsterdam 12.

Per estinguere un debito di 1 *Lst* occorre la rimessa di *fl* 12, e questa rimessa costerà in Italia

$$\frac{12 \cdot 256}{100} = 30{,}72 \text{ L.}$$

Inversamente: se creditori, ordiniamo al debitore di comperare, spendendo *Lst* 1, dei *fl*. Ed il debitore compera e ci rimette *fl* 12, che venduti da noi a 256 ci danno L. 30,72 di ricavo. Cosicchè la *parità* della *Lst*. riscossa e pagata con carta su Amsterdam è di L. 30,72.

Se i cambi non lo sono già, si riducono alla stessa scadenza, che dev'essere quella dell'effetto da acquistare.

Quando è in nostra facoltà la scelta del modo di pagamento o riscossione, se la conoscenza dei cambi lo permette si fa l'arbitraggio, si determina cioè la parità della moneta in cui è il debito o credito è espresso pagandola o riscuotendola con rimesse su differenti piazze intermediarie, e si sceglie la via più conveniente.

Si possono mettere in evidenza i risultati del calcolo riunendo i listini della nostra piazza e di quella del corrispondente, in modo che sulla stessa linea stiano le quotazioni verso la stessa piazza intermediaria, e la *parità* relativa. Questo prospetto si dice *Listino cifrato* (*Cote chiffrée*).

Dal confronto delle parità si vede anche se è possibile una speculazione; creandosi un credito colla via della parità più bassa e riscuotendolo con quella della parità più alta.

Esempio: Le quotazioni dei cambi in Italia sono:

Parigi 109 *vista*
Londra 30,5 *vista*
Amsterdam 258 *3 mesi* 4 %.

A *New-York*:

Parigi 5,93 *vista* (*fr* per $)
Londra 4.74 *a 7 giorni* 5 %
Amsterdam 40,5 *vista.*

Volendo fare un arbitraggio tra l'Italia e N. Y. si tenga conto delle seguenti spese:

per la via di Parigi 1 %,
» » » » *Londra* 1 ¼ %
» » » » *Amsterdam* 1 ½ %.

Applichiamo la catenaria, senza tener conto delle spese, per ora.

Rimessa indiretta in *fr*.

L x	100 $ vista
$ vista 1	5,93 *fr* vista
fr vista 100	109 *L* vista

$x =$ L. 643,10.

Rimessa indiretta in *Lst*.

Lit x	100 $ vista
$ vista 4,74	1 *Lst* 7 giorni
D Lst 7 giorni 7200	7193 *Lst* vista $(D-g)$ (1)
Lst vista 1	30,5 *Lit*

$x =$ L. 642.

Rimessa indiretta in *fl*.

Lit x	100 $ vista
$ vista 40,5	100 *fl* vista
$(D-g)$ *fl* vista 8910	9000 *fl* 3 mesi (D) (2)
fl 3 mesi 100	258 *Lit* vista

$x =$ L. 643,44.

Le parità ottenute non si possono ancora confrontare perchè *lorde* di spese.

Si vede, per ora, che la via più conveniente per pagare *potrebbe essere Londra* e quella per riscuotere *Amsterdam.*

Si supponga che il cambio, in Italia, del dollaro sia 6,4275 vista, spese ¾ % e si componga il *listino cifrato.*

(1) V. la nota a pag. 14.
(2) V. la nota a pag. 14.

PIAZZE	Sconto %	QUOTAZIONI in Italia	QUOTAZIONI a New-York	Parità lorde di 100 $	Spese ‰	Parità nette + Spese (pagare)	Parità nette — Spese (riscuot.)
New-York . .	—	6,4275 vista	—	642,75	3/4	643,2321	642,2679
Parigi.	—	109 vista	5,93 vista	643,10	1	643,7431	642,4569
Londra	5	30,5 vista	4,74 a 7 giorni	642,—	1 1/4	642,8025	641,1975
Amsterdam .	4	258 a 3 mesi	40,5 vista	643,44	1 1/2	644,4051	642,4749

La più bassa parità aumentata delle spese è *Londra*, la più alta, dedotte le spese, *Amsterdam*.

Se debitori a *N. Y.* pagheremo con rimessa in *Lst*, se creditori ci faremo rimettere effetti in *fl*. Essendo la più bassa parità per pagare maggiore della più alta per riscuotere non è possibile alcuna speculazione sui cambi.

Se l'operazione di cambio indiretto si compone di tratte e rimesse dirette su piazze intermediarie, si può, per ogni operazione *diretta* elementare applicare la regola per la scelta fra la tratta e la rimessa, prima di passare al confronto fra le parità ottenibili colle diverse piazze.

Esempio. Tra l'Italia e Londra. Via di Parigi.

Cambi: Italia Parigi 109
Parigi Italia 91,20
Parigi Londra 29
Londra Parigi 29,10.

Via di Amsterdam.

Cambi: Italia Amsterdam 260
Amsterdam Italia 38,40
Amsterdam Londra 12,05
Londra Amsterdam 12.

Applichiamo la regola e scegliamo fra la tratta e la rimessa. Con Parigi

It. P. $NN' = 109 \cdot 91{,}2 = 9940{,}8$
$EE' = 100 \cdot 100 = 10000$

Conviene la rimessa.

P. L. $NN' = 29 \cdot 1 = 29$
$EE' = 1 \cdot 29{,}10 = 29{,}10$

Conviene la rimessa.

Per la via di Parigi, dunque, *rimessa continuata.*

Con Amsterdam

It. A. $NN' = 260 \cdot 38{,}4 = 9984$
$EE' = 100 \cdot 100 = 10000$

Conviene la rimessa.

A. L. $NN' = 12{,}05 \cdot 1 = 12{,}05$
$EE' = 1 \cdot 12 = 12$

Conviene la tratta.

Perciò, per la via di Parigi, *se debitori* a Londra:
nostra rimessa a Parigi a 109, da Parigi a Londra a 29.
Se creditori:
rimessa da Londra a Parigi a 29,10, da Parigi a noi a 91,20.
Per la via di Amsterdam, *se debitori* a Londra:
nostra rimessa ad Amsterdam a 260, tratta di Londra su Amsterdam a 12.
Se creditori:
tratta di Amsterdam su Londra a 12,05, e sua rimessa a noi a 38,4.

Se creditori

per Parigi

Lit x	1 *Lst*
Lst 1	29,10 *fr*
fr 91,2	100 *Lit*

$x = Lit$ 31,907

per Amsterdam

Lit x	1 *Lst*
Lst 1	12,05 *fl*
fl 38,4	100 *Lit*

$x = Lit$ 31,119

Se debitori

per Parigi

Lit x	1 *Lst*
Lst 1	29 *fr*
fr 100	109 *Lit*

$x = Lit$ 31,61

per Amsterdam

Lit x	1 *Lst*
Lst 1	12 *fl*
fl 100	260 *Lit*

$x = Lit$ 31,20

Converrà per pagare la via di Amsterdam che costa 31,20 e per riscuotere quella di Parigi che rende 31,907, per *Lst* (indipendentemente dalle spese).

109. *Scelta della piazza più conveniente per comperare o vendere una certa divisa.* — Dà origine a calcoli analoghi a quelli dei precedenti arbitraggi e può essere preceduta da veri arbitraggi di cambio per vedere il modo migliore per riscuotere o pagare su ciascuna piazza, in cui la divisa in questione è quotata.

Esempio. I corsi su New-York sono in un certo giorno i seguenti, sui seguenti listini.

Italia 6,36 1/2 vista
Parigi 5,80 vista

Londra 50 $^3/_4$ a 60 giorni 4 $^0/_0$
Amsterdam 246 a 3 mesi »

I cambi, allo stesso giorno sono

Italia Parigi 109 vista
Parigi Italia 90,75 vista

Italia Londra 30,5 vista
Londra Italia 30,9 a 3 mesi 5 $^0/_0$

Italia Amsterdam 259 vista
Amsterdam Italia 38,15 a 3 mesi 5 $^0/_0$

Spese: *in Italia* 1 $^0/_{00}$
a Parigi 2 $^0/_{00}$
a Londra 2 $^1/_2$ $^0/_{00}$
ad Amsterdam 2 $^3/_4$ $^0/_{00}$

Trovare su qual piazza ci conviene comperare o vendere carta su New-York.

Si riducono a vista i cambi a scadenza.

Londra-N. Y. 60 giorni	50,375
+ sconto 4 $^0/_0$ per 60 giorni	0,33815
a vista	50,71315
Amsterdam-N. Y. 3 mesi	246
+ sconto 4 $^0/_0$ 3 mesi	2,4848
a vista	248,4848
Londra-Italia 3 mesi	30,90
— sconto 5 $^0/_0$ 3 mesi	0,3865
a vista	30,5135
Amsterdam-Italia 3 mesi	38,15
+ sconto 5 $^0/_0$ 3 mesi	0,4831
a vista	38,6331

Ed ora si sceglie tra la tratta e la rimessa per riscuotere o per pagare

a Parigi

$$N N' = 109 \cdot 90{,}75 = 9891{,}75$$
$$E E' = 100 \cdot 100 = 10000$$

conviene la *rimessa*;

a Londra

$$N N' = 30{,}5 \cdot 1 = 30{,}5$$
$$E E' = 1 \cdot 30{,}5135 = 30{,}5135$$

conviene la *rimessa*;

ad Amsterdam

$$N N' = 38{,}6331 \cdot 258 = 10005{,}43$$
$$E E' = 100 \cdot 100 = 10000$$

conviene la *tratta*.

Operando, si hanno i seguenti risultati

in Italia

Acquisto		Vendita	
636,5		636,5	
+ 1 $^0/_{00}$	0,6365	— 1 $^0/_{00}$	0,636
637,1365		635,864	

a Parigi

$L\ x$	100 $	$L\ x$	100 $
$ 100	580 *fr* vista	$ 100	580 *fr* vista
fr vista 100	109 L vista	*fr* 90.75	100 L
L 1000	1002 L colle spese	L 1000	998 meno le spese
$x = L$ 633,46		$x = L$ 637.82	

a Londra

$L\ x$	100 $	$L\ x$	100 $
$ 1	50,7131 *d*	$ 1	50,7131 *d*
d 240	30,5 *Lit*	*d* 240	30,5135 *Lit*
L 1000	1002,5 colle spese	*Lit* 1000	997,5 nette di spese
$x = L$ 646.048		$x = L$ 643,03	

ad Amsterdam

$L\ x$	100 $	$L\ x$	100 $
$ 100	246 *fl*	$ 100	246 *fl*
fl 38,6331	100 *Lit*	*fl* 100	259 L
L 1000	1002,75 colle spese	L 1000	997,25 nette di spese
$x = L$ 638,50		$x = L$ 635,388	

Riepiloghiamo i risultati

Costo	Piazza	Ricavo
637,13	*Italia*	635,864
633,46	*Parigi*	637,82
646,048	*Londra*	643,03
638,50	*Amsterdam*	635,388

Costo più basso a Parigi L. 633,46
Ricavo più alto a Londra » 643,03

Si acquista a Parigi e si vende a Londra con utile, se le altre spese, non comprese nel $^0/_{00}$ usato, non assorbono il profitto. Sarebbe anzi possibile, colla stessa avvertenza, fare la speculazione solo con Parigi, *riscuotendo e pagando*, perchè la causa dell'utile sta nella forte differenza dei cambi coll'Italia.

110. *Calcoli per ordini di Banca.* — I corsi dei cambi che si leggono sui listini si riferiscono ad affari già compiuti ed hanno valore solo come indici di una situazione recente ma già sorpassata; inoltre non impegnano nessuno a concludere affari in base ad essi. Usano perciò le ditte bancarie offrire ai loro corrispondenti l'acquisto o la vendita di divise estere a cambi determinati, impegnandosi per determinati importi e fino ad un certo momento. Su queste offerte impegnative o ferme si possono fondare attendibili calcoli preventivi di date operazioni di cambio.

Se al momento dell'esecuzione di un ordine di acquisto o di vendita, il corso, in base al quale l'operazione fu pensata, non è impegnativo per il ricevente, può darsi che quell'ordine non possa eseguirsi che ad un corso diverso. Se si tratta di una sola operazione, oppure di operazioni opposte ma uno è il corso mutato, chi riceve l'ordine l'eseguirà se la variazione è conveniente, altrimenti si regolerà secondo il modo in cui l'ordine è dato.

I cambi a cui il banchiere dovrebbe eseguire l'ordine siano: per la tratta $N_T\,E_T$, per la rimessa $N_R\,E_R$. Vuol dire che per lui: una rimessa d'importo E_R dovrebbe costare N_R, ed una rimessa d'importo 1, $\frac{N_R}{E_R}$; una tratta di ricavo N_T dovrebbe essere di importo E_T, e per un ricavo 1, di importo $\frac{E_T}{N_T}$. L'importo della tratta corrispondente alla rimessa di importo unitario dovrebbe essere $\frac{N_R}{E_R} \cdot \frac{E_T}{N_T}$, e tale importo è stato considerato da chi ha dato l'ordine, nei suoi calcoli preventivi del risultato. Coi cambi mutati, al momento dell'esecuzione, tale espressione, diventa in generale, $\frac{N'_R E'_T}{E'_R N'_T}$.

L'ordine sarà coi nuovi cambi eseguibile: 1° *indifferentemente* se la nuova espressione è equivalente alla precedente; 2° *con utile* se minore. Cioè, in generale se

$$\frac{N_R E_T}{E_R N_T} \geqq \frac{N'_R E'_T}{E'_R N'_T}$$

ossia

$$\frac{E'_R N'_T}{E_R N_T} \geqq \frac{N'_R E'_T}{N_R E_T}$$

Siano ora i due cambi quotati *per incerto* cioè

$$E_T = E'_T \quad ; \quad E_R = E'_R.$$

La condizione precedente diventa successivamente

$$a_1) \quad \frac{N'_T}{N_T} \geqq \frac{N'_R}{N_R}$$

$$\frac{N'_T}{N_T} - 1 \geqq \frac{N'_R}{N_R} - 1$$

$$b_1) \quad \frac{N'_T - N_T}{N_T} \geqq \frac{N'_R - N_R}{N_R}$$

$$c_1) \quad (N'_T - N_T)\,N_R \geqq (N'_R - N_R)\,N_T$$

Siano ora i cambi quotati *per certo*, cioè

$$N_T = N'_T \quad ; \quad N_R = N'_R.$$

La condizione precedente diventa successivamente

$$a_2) \quad \frac{E'_R}{E_R} \geqq \frac{E'_T}{E_T}$$

$$\frac{E'_R}{E_R} - 1 \geqq \frac{E'_T}{E_T} - 1$$

$$b_2) \quad \frac{E'_R - E_R}{E_R} \geqq \frac{E'_T - E_T}{E_T}$$

$$c_2) \quad (E'_R - E_R)\,E_T \geqq (E'_T - E_T)\,E_R.$$

Quando i modi di quotazione sono uguali i cambi nuovi sono equivalenti ai fissati se direttamente proporzionali (a_1, a_2), *cioè se le variazioni sono nello stesso senso e proporzionali ai cambi* (b_1, b_2).

Sia invece quotato per incerto il cambio per la tratta e per certo l'altro, cioè

$$E_T = E'_T \quad ; \quad N_R = N'_R.$$

La solita condizione diventa

$$\frac{E'_R N'_T}{E_R N_T} \gtreqless 1$$

$$a'_3) \quad \frac{E'_R}{E_R} \gtreqless \frac{N_T}{N'_T}$$

$$\frac{E'_R}{E_R} - 1 \gtreqless \frac{N_T}{N'_T} - 1$$

$$b'_3) \quad \frac{E'_R - E_R}{E_R} \gtreqless \frac{N_T - N'_T}{N'_T}$$

$$c'_3) \quad (E'_R - E_R) N'_T \gtreqless (N_T - N'_T) E_R.$$

Se il cambio quotato per incerto fosse quello per la rimessa, si avrebbe

$$b''_3) \quad \frac{E_T - E'_T}{E'_T} \gtreqless \frac{N'_R - N_R}{N_R}$$

Perciò, se i cambi sono quotati *in modi differenti, i nuovi saranno equivalenti ai cambi fissati se inversamente proporzionali* (a_3) *cioè se le variazioni avvengono in senso opposto e proporzionalmente ai corsi più bassi* (*od ai più alti*) (b_3).

La verifica di queste proporzionalità è inutile se le variazioni avvengono in senso contrario a quello indicato, perchè allora danno entrambe utile o entrambe perdita.

Se avvengono nel senso indicato e si tratta di scegliere la più conveniente tra un gruppo di operazioni, o la coppia più conveniente fra due gruppi di operazioni opposte occorre fare il calcolo delle variazioni unitarie (b).

Trattandosi di due operazioni opposte si fa il calcolo delle variazioni (b), oppure si suppone di ignorare uno dei cambi nuovi e si determina quale dovrebbe essere perchè la variazione riesca indifferente (a) e poi lo si confronta con quello che è realmente, vedendo se la variazione subita è sufficiente per rendere possibile l'operazione.

Esempi.

Londra riceve ordine di rimettere (*comperare*) *carta su New-York a* 50 $^1/_4$ (*d* per 8) *e trarre* (*vendere*) *su Barcellona a* 48 (*d* per 5 *ptas*). *I cambi, al momento dell'esecuzione, sono*

New-York 50 $^{11}/_{32}$
Barcellona 48 $^1/_8$

Per New-York una perdita (aumenta il costo della rimessa) per Barcellona un utile (aumenta il ricavo della tratta). Confrontiamo le variazioni

$$c_1) \quad (N'_R - N_R) N_T = (50\frac{11}{32} - 50\,{}^1/_4)\,48 = \frac{3}{32} \cdot 48 = \frac{144}{32} \textit{ perdita}$$

$$N'_T - N_T) N_R = (48\,{}^1/_8 - 48)\,50\,{}^1/_4 = \frac{1}{8}\,50{,}25 = \frac{201}{32} \textit{ utile}$$

L'utile supera la perdita.

Altro modo: Supposto noto il corso nuovo per N. Y. determiniamo quello per Barcellona.

$$a_1) \quad \frac{N'_T}{N_T} = \frac{N'_R}{N_R} \qquad N'_T = \frac{N_T N'_R}{N_R} = \frac{48 \cdot 50\frac{11}{32}}{50\,{}^1/_4} = 48{,}089$$

Barcellona è aumentato invece a 48,125 dunque l'operazione non solo è *possibile*, ma lo è *con utile*.

Londra riceve l'ordine di rimettere N. Y. a 50 $^1/_4$ *e trarre su Kopenagen a* 18,22 (*Kr per Lst*). *I cambi possibili sono*

New-York 50 $^{11}/_{32}$
Kopenagen 18,20.

Per N. Y. si ha perdita, per Kopenagen utile (è diminuito l'importo della tratta in *Kr.* che rende una *Lst*). Confrontiamo le variazioni

$$b''_3) \quad N'_R - N_R) E'_T = (50\,{}^{11}/_{32} - 50\,{}^1/_4)\,18{,}2 = \frac{3}{32} \cdot 18{,}2\,\frac{54{,}6}{32} \textit{ perdita}$$

$$(E_T - E'_T) N_R = (18{,}22 - 18{,}20)\,50\,{}^1/_4 = 0{,}02 \cdot 50{,}25 = \frac{32{,}151}{32} \textit{ utile}$$

oppure

$$(N'_R - N_R) E_T = \frac{3}{32}\,18{,}22 = \frac{54{,}66}{32} \textit{ perdita}$$

$$(E_T - E'_T) N'_R = 0{,}02 \cdot 50\frac{11}{32} = \frac{32{,}22}{32} \textit{ utile}$$

La perdita supera l'utile.

Altro modo: Supposto noto il nuovo corso per N. Y. determiniamo quello per Kopenagen.

$$\frac{E'_T}{E_T} = \frac{N_R}{N'_R}$$

da cui

$$E'_T = \frac{N_R E_T}{N'_R} = \frac{50{,}25 \cdot 18{,}22}{50\frac{11}{32}} = 18{,}186$$

Il corso su Kopenagen è disceso solo a 18,20. L'operazione non è possibile che con *perdita*.

New-York riceve ordine di trarre su una di queste piazze

Londra a 4,75 $^1/_2$
Amsterdam a 41 $^1/_2$
Parigi a 5,92 $^7/_8$

I cambi invece sono rispettivamente

4,75 $^5/_8$; 41,51 ; 5,93.

La variazione del cambio su Parigi, cui N. Y. dà il certo, è dannosa, e si confrontano allora solo le altre due.

Londra ed Amsterdam sono quotate per incerto. Facciamo come negli esempi precedenti

$$(N'_T - N_T)\, N_{T_2} = (4{,}75\ ^5/_8 - 4{,}75\ ^1/_2)\, 41{,}5 = \frac{1}{800}\, 41{,}5 = 0{,}051875 \text{ (Londra)}$$

$$(N'_{T_2} - N_{T_2})\, N_T = (41{,}51 - 41{,}50)\, 4{,}75\ ^1/_2 = 0{,}01 \cdot 4{,}75\ ^1/_2 = 0{,}04755 \text{ (Amst)}$$

Quindi, la variazione di Londra essendo la più forte, trae su Londra.

Londra deve rimettere carta su Parigi a 28 *e trarre su Cristiania a* 18,20. *I cambi sono rispettivamente*

28,10 ; 18,27.

Per Parigi si ha utile, per Cristiania, perdita.

$$(E'_R - E_R)\, E_T = (28{,}10 - 28)\, 18{,}2 = 0{,}10 \cdot 18{,}2 = 0{,}182 \textit{ utile}$$

$$(E' - E_T)\, E_R = (18{,}27 - 18{,}2)\, 28 = 0{,}07 \cdot 28 = 0{,}196 \textit{ perdita}$$

La perdita supera l'utile.

Altro modo. Calcoliamo la variazione percentuale.

$$\frac{E'_R - E_R}{E_R} = \frac{28{,}10 - 28}{28} = \frac{1}{280} \textit{ utile}$$

$$\frac{E'_T - E_T}{E_T} = \frac{18{,}27 - 18{,}2}{18{,}2} = \frac{0{,}07}{18{,}2} = \frac{1}{260} \textit{ perdita}$$

Altro modo. Troviamo il corso per Cristiania, supposto noto quello nuovo per Parigi.

$$\frac{E'_R}{E_R} = \frac{E'_T}{E_T}\ , \quad E'_T = \frac{E'_R E_T}{E_R} = \frac{18{,}2 \cdot 28{,}1}{28} = 18{,}265$$

Il corso su Cristiania è invece cresciuto sino a 18,27, perciò la tratta non si può fare che con perdita.

111. — Un banchiere può ricevere ordine di acquistare o vendere a dati cambi, *netti di spesa*. È facile vedere quali debbono essere i cambi effettivi perchè il banchiere possa eseguire l'ordine e coprirsi delle spese.

Se l'ordine è d'acquistare a C, e le spese sono $s/_{100}$ sul corso effettivo C' si ha

$$C' + C'\frac{s}{100} = C$$

da cui

$$C' = C : \left(1 + \frac{s}{100}\right).$$

Se l'ordine è di vendita

$$C' - C'\frac{s}{100} = C$$

da cui

$$C' = C : \left(1 - \frac{s}{100}\right).$$

Esempio. Comperare del Londra netto a 29. *Spese* 1 $^0/_{00}$.

$$C' = 29 : 1{,}001 = 28{,}971 \text{ o meno}$$

Infatti

$$28{,}971 + 1\ ^0/_{00} = 28{,}999971 = [29].$$

Amsterdam deve trarre netto su Londra a 12,20; *spese* $^3/_4$ $^0/_{00}$.

$$C' = 12{,}2 : 0{,}99925 = 12{,}209 \text{ o più}$$

Infatti

$$12{,}209 - {}^3/_4\ ^0/_{00} = 12{,}19983 = [12{,}20].$$

112. — Il calcolo relativo all'acquisto od alla vendita di effetti in moneta estera viene dai banchieri dimostrato in un apposito prospetto — *distinta di negoziazione* — simile per la forma e per la natura del calcolo alla distinta di sconto, con in più la determinazione del ricavo in base al cambio. Gli effetti vengono portati alla scadenza del cambio e se questa non è *a vista* vi possono essere numeri di sconto e numeri d'interesse. In generale effetti in moneta diversa o negoziati a cambi diversi figurano su differenti distinte. Una apposita colonna ricorda per ogni effetto la spesa del bollo.

CAPITOLO DODICESIMO.

VALORI MOBILIARI

113. — I capitalisti generalmente rifuggono dall'investire i loro capitali in impieghi a lunga scadenza, dall'*immobilizzarli* cioè in questo o quel modo. E per varie ragioni. Anzitutto possono presentarsi occasioni di migliori investimenti, la primitiva sicurezza può andare perduta, infine possono le loro ricchezze diventare necessarie non più come capitali, ma per destinarle al consumo.

Quello che importa in tali casi è la facilità di *realizzare* il proprio capitale, di riaverlo *liquido*, e ciò può avvenire sollecitamente, senza la liquidazione dell'impresa [1] cedendo ad altri i proprii diritti.

Per questo sollecito trapasso si sono creati dei documenti — *titoli* — facilmente trasmissibili, che rappresentano un capitale di dato importo investito in una data impresa, il legittimo possessore dei quali si sostituisce, in tutti i diritti ed obblighi relativi, al primo capitalista investitore.

Questi titoli, pure rappresentando immobilizzazioni, sono, per la facilità della loro realizzazione mediante cessione, chiamati anche *valori mobiliari*.

Per facilitare questa cessione sono sorte sulle principali piazze finanziarie speciali istituzioni dette *Borse* dei titoli, che consistono in riunioni periodiche, disciplinate a seconda dei

[1] Nel senso di affare speculazione o traffico.

paesi dalla legge o dalla consuetudine, nelle quali i privati, tra loro direttamente o coll'intervento di speciali mediatori — *Agenti di cambio* —, comprano e vendono, insieme ad altre cose, anche i titoli in questione. Cogli elementi dei contratti fatti col loro intervento i mediatori formano un elenco dei prezzi medii, detto *listino dei corsi*, e questo listino in vario modo pubblicato, serve, specialmente quando i contratti sono stati numerosi, di regola a coloro che non sono intervenuti alla Borsa, per apprezzare i titoli che li interessano, quando non abbiano altri più sicuri e diretti elementi di giudizio.

È evidente che realizzando un titolo non è da pensare di riavere lo stesso capitale speso nell'acquisto; si riceverà di più o di meno secondo la quantità di capitale che al momento della vendita cerca impiego in quel determinato modo.

A sua volta la quantità di capitali disponibili, senza distinzione tra un impiego ed un altro, dipende dalla condizione finanziaria del paese ed è perturbata da moltissime circostanze politiche economiche legislative.

Per un dato titolo la quantità di capitali disponibili, o, come si dice, *la sua domanda*, dipende dalla sicurezza e dalla produttività [1].

E la sicurezza, *per il singolo capitalista*, che non considera il titolo in sè ma il capitale impiegatovi, significa facilità di vendita e *fermezza* dei corsi, ed è quindi tanto maggiore quanto più il titolo è conosciuto diffuso e quotato in molte Borse, cioè quanto più largo è il suo mercato.

Per le anzidette ragioni possono essere più ricercati ed avere quindi un corso più elevato i titoli di importo minimo.

114. — I titoli sono di diversa natura: o rappresentano *crediti* verso aziende pubbliche e private, oppure *parti del capitale* di alcune Società commerciali.

Fra le aziende pubbliche, lo Stato, le Provincie ed i Comuni da noi e le corrispondenti corporazioni all'estero, sono

[1] Questo si può dire per i capitali che cercano impiego durevole. Data però la variabilità dei corsi, vi sono persone che acquistano o vendono titoli solo per guadagnare le differenze dei prezzi, e preferiscono perciò titoli di corso instabile — *titoli di speculazione*.

spesso costretti a ricorrere a mutui per somme ingentissime, sia per l'insufficienza dei loro proventi normali a compiere opere di grande costo, sia per consolidare e rendere meno difficile la loro situazione finanziaria, sostituendo debiti a lunga scadenza ad altri a breve.

I prestiti hanno differenti scadenze. Lo Stato, che « non può estinguersi mai » contrae anche *prestiti perpetui*, cioè si obbliga al pagamento periodico degli interessi senza dire se, come, e quando, restituirà il capitale. La facoltà del rimborso è però sempre sottintesa, salvo espresse dichiarazioni in contrario, relative a brevi periodi di tempo.

Tutti gli altri prestiti sono rimborsabili entro un tempo determinato, (per lo Stato: *redimibili*).

Per urgenze del servizio di cassa possono le pubbliche aziende ricorrere anche a mutui a breve scadenza, o con privati capitalisti (per es.: le anticipazioni che le banche d'emissione sono tenute a fare allo Stato italiano), o col pubblico con titoli speciali (generalmente il solo Stato: *Buoni del Tesoro*).

I debiti contratti dallo Stato costituiscono due gruppi. Il 1° comprende quelli di importo determinato che gravano sullo Stato ogni anno per una somma d'interessi determinabile in precedenza: *Debito consolidato*; il 2° comprende i rimanenti: *Debito fluttuante*.

I prestiti perpetui sono detti *Rendite* e si distinguono a seconda del tasso d'interesse e talora dall'anno di emissione.

I debiti redimibili dello Stato e quelli delle altre aziende pubbliche sono rappresentati da *obbligazioni* e si distinguono col nome del debitore la causa dell'emissione ed il tasso.

Alcune specie Società commerciali contraggono pure prestiti temporanei mediante *obbligazioni* rimborsabili in modi e tempi determinati.

Tutte le aziende private possono, offrendo beni stabili in garanzia ipotecaria contrarre mutui a lunga scadenza, col pubblico, mediante l'intervento di *Istituti di Credito Fondiario*. Il privato lascia inscrivere ipoteca sui suoi immobili a favore dell'I. di C. F. e si obbliga a pagargli un certo numero di semestralità costanti d'ammortamento (1° gennaio, 1° luglio)

calcolate in modo da comprendere oltre all'interesse alcuni gravami fiscali ed un compenso per l'I. di C. F. Questi dà al privato dei titoli — *Cartelle di C. F.* — con le quali esso si obbliga verso il portatore al pagamento (1° aprile, 1° ottobre) degli interessi ed al rimborso delle cartelle.

Il privato vende le cartelle in Borsa al corso della giornata ottenendo così il capitale che gli occorre, rimanendo debitore dell'importo nominale delle cartelle verso l'I. di C. F. (1).

Un *meccanismo analogo* fu presso di noi adottato per i prestiti dei Comuni e delle Provincie, contratti per mezzo della Cassa Depositi e Prestiti, Sezione autonoma di Credito Provinciale e Comunale.

115. — PRINCIPALI TITOLI DEL DEBITO PUBBLICO ITALIANO IN CIRCOLAZIONE.

Rendite.

5 % netto, non convertibile prima del 1931, godimento 1 gennaio 1 luglio.

3,50 % netto (ex 5 % — 3,75 %) non convertibile prima del 1920; godimento 1 gennaio 1 luglio.

3,50 % netto emesso nel 1902; godimento: per i certificati nominativi trimestrale; 1 gennaio 1 aprile ecc., semestrale 1 gennaio 1 luglio per gli altri titoli.

3 % lordo di Imposta di R. M., netto 2,40 % godimento 1 aprile 1 ottobre.

Le cedole semestrali delle cartelle al portatore e dei certificati misti di questi consolidati sono ricevute in pagamento delle imposte dirette dovute allo Stato in qualunque periodo del semestre che precede la loro scadenza.

Debiti Redimibili.

Debito Redimibile 3,50 e 3 % netto; 1908, 1910; taglio minimo L. 500/100 rispettivamente; godimento 1 aprile 1 ottobre.

Prestito Blount	5 % lordo 500/125	1 aprile 1 ottobre.
Asse Ecclesiastico	» » 100	
Ferrovie Tirreno Ferrovia Centrale Toscana Opere Edilizie di Roma Lavori del Tevere Risanamento Napoli	5 % lordo 500	1 gennaio 1 luglio

(1) In questo modo il privato è il vero emittente delle cartelle e sopporta le conseguenze del modo più o meno felice di questa emissione. Se l'Istituto fa il prestito in denaro e vende lui le cartelle, affinchè nè esso nè il privato restino danneggiati occorre regolare in qualche modo la differenza fra il valor nominale da rimborsare e il ricavo dell'emissione.

Ferrovie Livornesi Obbligazioni Ferrovie delle tre reti Adriatica Mediterranea e Sicula	3 % lordo	500	1 gennaio 1 luglio	
Prestito Nazionale 1915	4 ½ netto	100	1 gennaio 1 luglio	
» » 1916	5 % »			

Cartelle del Credito Comunale e Provinciale:

	4 % netto	200	1 gennaio 1 luglio	
ordinarie	3 ¾ »	1000		
Speciali (ex Roma)	3 ¾ »	500	1 aprile 1 ottobre	

Buoni del Tesoro.

Ordinari, a vari tassi, fino a 12 mesi; l'interesse in quelli di recente emissione si riscuote in una sol volta anticipatamente; altrimenti, alla loro scadenza.

4 % quinquennali 500 1 aprile 1 ottobre.

5 % anticipato triennali e quinquennali, 100, 1 gennaio 1 luglio, le cui cedole possono servire come quelle dei consolidati a pagare le imposte dirette dovute allo Stato in qualunque periodo del semestre che precede la loro scadenza.

116. — Il pubblico viene invitato ad impiegare i suoi capitali in titoli di nuova emissione generalmente in questo modo. Vengono diffusi degli avvisi che indicano la specie del titolo, il suo frutto, le sue garanzie, eventualmente il modo di rimborso, il prezzo di emissione ed il modo di pagarlo, il giorno *di godimento*, cioè quello da cui incominciano a decorrere i frutti; e stabiliscono i giorni in cui presso determinati uffici pubblici o privati è aperta *la sottoscrizione*. Trattandosi di prestiti per aziende private gli inviti sono fatti talora direttamente ai più facoltosi capitalisti ed a richiesta si danno loro documenti e notizie più dettagliate. *Se è fissato l'importo del prestito* ed i capitali offerti lo superano, si procede alla riduzione delle sottoscrizioni singole, eccettuate le minime.

I rapporti che passano tra l'azienda debitrice e coloro che si incaricano di ricevere le sottoscrizioni possono essere di due specie; o costoro sono semplici mandatari, sono essere i veri assuntori dell'emissione stessa: generalmente un gruppo di ditte bancarie riunite in « Sindacato » o « Consorzio », che si impegnano a pagare per ogni titolo un certo prezzo entro un dato tempo, e rivendono alla loro volta al pubblico nel modo e condizioni meglio convenienti (aggiudicazione). Spesso, quando la sottoscrizione è per conto diretto della azienda debitrice un gruppo di banchieri garantisce *il collocamento* di tutti i titoli, impegnandosi ad assumere a date condizioni quelli che non venissero sottoscritti (Sindacato di garanzia).

L'azienda debitrice può essa stessa a mezzo di agenti di cambio vendere i suoi titoli in borsa o seguire altre vie credute più opportune. Talora lo Stato impone ai cittadini la *sottoscrizione* (*prestito forzoso*).

Il prezzo che il primo acquirente paga per il titolo, *prezzo di emissione*, può essere uguale a quello sul quale si calcolano i frutti — *alla pari* — oppure diverso — *sopra o sotto la pari*.

Nel caso di emissione sotto la pari, e quando il prezzo di *rimborso* è maggiore di quello di emissione, la differenza costituisce un lucro aggiunto all'interesse periodico pattuito.

Il prezzo d'emissione viene, in generale, pagato in parte al momento della sottoscrizione ritirando una ricevuta od un titolo provvisorio od interinale. Pei versamenti successivi si hanno altre ricevute o si fa apposita annotazione sul certificato provvisorio. All'atto dell'ultimo versamento si ritirano le ricevute od il titolo provvisorio rilasciando quello definitivo.

117. — Le quote di *uguale importo* in cui viene diviso il capitale delle *società anonime* (e delle accomandite per azioni) [1] prendono nome di *azioni*; e *certificati di azione* si chiamano i titoli che le rappresentano.

La circolazione delle azioni non può esistere prima che la società sia legalmente costituita. La costituzione può avvenire in due modi, ma sempre *dopo* che: tutto il capitale sia stato sottoscritto e versato (presso la Cassa Depositi e Prestiti o presso un Istituto di emissione) in una data misura (per legge almeno $\frac{1}{10}$ del sottoscritto per le società che esercitano l'industria delle assicurazioni, $\frac{3}{10}$ nelle altre), e sia avvenuto un « ampio sistema di pubblicazioni che non possono farsi senza l'approvazione dell'Autorità giudiziaria [2] ». Con un primo modo un gruppo di persone fanno constare mediante atto notarile l'esistenza delle condizioni volute dalla legge per la costituzione della società, e procedono alle nomine delle cariche sociali. L'altro procedimento è quello della pubblica sottoscrizione. Un gruppo di *promotori* si incarica di raccogliere le adesioni ad un programma od a un progetto di statuto della società, e per fare sottoscrivere le azioni e versare le quote stabilite. Le sottoscrizioni devono essere autenticate da notaio. Quando tutto il capitale è sottoscritto e versato nelle volute proporzioni, in una assemblea dei sottoscrittori si procede alla stipulazione dell'atto notarile di costituzione.

Quando la società è legalmente costituita ogni socio ha diritto alla consegna dei titoli che rappresentano le quote da lui sottoscritte, e sono valide le vendite delle azioni.

Le azioni possono essere emesse *sopra*, *mai sotto la pari*. Il di più in confronto al nominale (*sopraprezzo*) può servire a rimborsare le numerose

---

(1) La società anonima si distingue dalle altre perchè i debiti sociali sono garantiti solo dal capitale sociale. Nelle accomandite i debiti sociali sono garantiti *anche* dal patrimonio privato dei soci gerenti (*amministratori*).

(2) Vivante, *Tratt. di Dir. Comm.*, II, pag. 251.

e gravi spese di fondazione, ed a formare coll'eccedenza un *fondo di riserva*.

I diritti spettanti ai soci possono (esclusion fatta dal diritto di voto) essere diversi da una categoria all'altra di azioni. In alcuni momenti della sua vita la società può trovare utile emettere (1) delle « azioni di *priorità* o *privilegiate* o *preferenziali* », che danno ai loro possessori più diritti che agli altri soci; generalmente quello di prelevare a loro favore dagli utili sociali, una quota minima, prima di dividerli fra tutte le azioni.

Una società in cui è versato tutto il capitale sottoscritto, può aumentarlo con nuove emissioni di azioni. A queste seconde emissioni non sono applicabili le rigorose norme dettate dalla legge sulla forma delle sottoscrizioni sul deposito dei primi versamenti ecc. volute per la prima emissione di azioni.

Le nuove azioni possono essere riservate ai vecchi azionisti, in ragione di tante azioni nuove per un certo numero di azioni vecchie alla pari ad un altro prezzo sempre inferiore al corso in borsa dei vecchi titoli. I soci possono rinunciare ad esercitare questo diritto e vendere i *buoni d'opzione* loro spettanti.

Gli utili annuali quali risultano dal *bilancio* approvato dall'assemblea dei soci, dopo detrazione delle quote che la prudenza del legislatore o quella maggiore dei soci vuole accantonare quali fondi di riserva, vengono a costituire il *dividendo*.

Nel caso di perdite queste si coprono colla riserva se c'è e se basta, la perdita scoperta se è piccola si lascia in sospeso per colmarla cogli utili futuri, se è rilevante si richiedono nuovi versamenti ai soci o si riduce il capitale sociale nominale.

118. — Per l'*importo* o *taglio* si distinguono i titoli in: *semplici* o di *minimo taglio* se rappresentano la minima quota di prestito od una sola azione, ed in *multipli* (2).

Per la loro *trasmissibilità* si distinguono in *nominativi*, al *portatore* ed all'*ordine*. I titoli al portatore si trasferiscono colla consegna ad altri, quelli nominativi richiedono essenzialmente la trascrizione su speciali registri tenuti dall'azienda emittente, quelli all'ordine si trasferiscono colla *girata* scritta dal cedente sul titolo. I frutti si esigono: pei titoli nominativi presentandoli agli uffici designati affinchè l'esazione sia segnata su di essi; per i titoli al portatore si taglia da ognuno di essi un modulo speciale — *cedola*, *tagliando* o *coupon* — e si presenta all'ufficio incaricato del pagamento. Esistono titoli detti *misti*, cioè nominativi muniti di cedole per la riscossione dei frutti.

(1) Per capitale raccolto in momenti sfavorevoli, o per capitale conferito in una forma particolarmente vantaggiosa — es. denaro contante.

(2) I titoli multipli, al portatore, non possono, in generale, essere divisi in altri di taglio minore.

Dovevano da noi essere nominative le azioni costituenti cauzione degli amministratori della società (1), quelle delle società cooperative, e quelle di ogni società fino a che non fossero interamente versate; la loro trasmissione si registra sul *libro dei soci* tenuto da ogni società per azioni. Nel 1920 fu stabilita la nominatività obbligatoria di tutti i valori mobiliari, eccettuati i Buoni del Tesoro Italiano.

I titoli nominativi possono essere sottoposti a vincolo od ipoteca mediante apposita inscrizione sul libro dell'azienda emittente.

119. — Per il *rimborso* dei valori mobiliari occorre distinguere i prestiti perpetui dagli altri e considerare a parte le azioni.

Il debitore non ha obbligo di rimborsare i prestiti perpetui, tuttavia, in tempi floridi si pensa a rimborsarne qualche parte per ridurre la mole dei loro interessi che assorbe una rilevante parte delle entrate della maggioranza degli Stati. Taluni vi destinano gli avanzi annuali dei loro bilanci, altri fissano una somma periodica costante (per es. 1 % del debito originario) da investirsi in titoli, facendo altrettanto degli interessi di questi, fino a che tutti o buona parte dei titoli sono tolti dalla circolazione e possono venire distrutti (casse d'ammortamento) (2).

Della facoltà di rimborsare i prestiti perpetui lo Stato debitore si vale quando, per le condizioni proprie e del mercato finanziario, gli sarebbe possibile avere capitali a prestito in misura sufficiente e a condizioni migliori dei prestiti precedenti. Allora, assicuratosi l'appoggio di alcune grandi ditte bancarie, esso offre ai suoi creditori per una data specie di rendita: il pagamento del titolo al valor nominale o la *conversione* di esso ad un tasso inferiore. La conversione è talora *graduale* cioè fissata per due o più volte a distanza di qualche anno; quasi sempre, effettuata una conversione

(1) Dovendo convertire dei titoli al portatore in nominativi, specialmente se la conversione è provvisoria si può depositare i titoli al portatore presso un istituto di pubblica fiducia, che li custodisca e ritirarne un certificato nominativo che li rappresenti e permetta di operare su di essi senza asportarli o rimetterli in circolazione. A. Guilbault, *Traité d'économie industrielle*, Paris 1877, pag. 238-239.

(2) Da noi il « Consorzio Nazionale » sorto con una sottoscrizione nazionale ed eretto in Ente Morale nel 1866, ha un patrimonio con lo stesso scopo delle Casse d'Ammortamento e si accresce dei suoi frutti e delle liberalità dei privati.

il debitore si obbliga a non farne altre per un certo numero di anni; talora offre un premio a chi porta i titoli alla conversione.

I buoni del Tesoro ordinari sono estinti alle rispettive scadenze. Gli altri prestiti sono in generale estinti nella misura ed in epoche determinate da un « *piano d'ammortamento* ». Il rimborso dei titoli si può fare in somma fissa ed allora si estrae ogni volta a sorte un certo numero di titoli che, secondo i patti, cessano di fruttare dal giorno fissato per il rimborso oppure dal giorno del rimborso effettivo. Il debitore se se ne è riservata la facoltà, può estinguere il debito acquistando i titoli in borsa al corso ed annullandoli. Tale via sarà, naturalmente, seguita solo quando il corso è inferiore al prezzo altrimenti stabilito per il rimborso (ammortamento per acquisto sotto la pari).

Il rimborso delle *azioni* oltre al caso dello scioglimento della società, può avvenire colla *riduzione del capitale* oppure coll' *impiego di utili* che non si vogliono distribuire. Nella prima ipotesi il socio di cui si rimborsa l'azione riceve una « *azione di godimento* » che gli dà il diritto di concorrere al riparto degli utili che superano una stabilita percentuale, ed anche dei fondi di riserva che saranno accumulati all'epoca dello scioglimento della società.

120. — Essendo il prezzo d'emissione diverso da quello su cui si calcolano i frutti periodici e talora anche da quello di rimborso, il tasso nominale del prestito non corrisponde all'aggravio vero dell'azienda debitrice.

Inoltre le spese per la fabbricazione dei titoli, la loro bollatura, il rinnovo dei fogli di cedole, le spese d'emissione, le imposte sui frutti e sulla circolazione dei titoli che possono essere a carico dell'azienda debitrice (come in generale per i titoli recenti), senza contare le spese di pubblicità delle estrazioni, il controllo sui titoli, le provvigioni ai banchieri o gli interessi perduti nel pagamento delle cedole, rendono molto diverso da quello nominale il *tasso effettivo o reale del capitale avuto a prestito.*

Volendo determinare questo tasso *si deve in generale: uguagliare il ricavo netto della emissione, al valore attuale, calcolato a questo tasso incognito, di tutte le somme che in avvenire si dovranno pagare per il servizio del prestito.* Si vede subito che la messa in equazione del problema non è possibile se non sono *determinati* (fissati) il tempo e il modo del rimborso; ed inoltre che in generale il problema permette solo una risoluzione numerica approssimata.

Trattandosi di prestiti perpetui o di prestiti rimborsabili

pei quali la rata complessiva sia costante, si possono applicare le formole approssimate date nel capitolo delle periodicità, avvertendo che S nelle presenti applicazioni indica il *ricavo netto* della emissione ed a la *rata costante complessiva* che fa il servizio del prestito.

Nella determinazione di a (costante, colle formole della periodicità d'ammortamento) non offre difficoltà il fatto che il rimborso avvenga talora per una somma diversa da quella su cui si calcolano i frutti. Sia N il nominale, r il tasso relativo, N_1 il valore di rimborso: si determina un tasso r_1 tale che $r\,N = r_1 N_1$ e nella formola che dà la rata si mette per tasso r_1 e si dà ad S il valore di rimborso dei titoli.

Esempio. Una Società ferroviaria fa un prestito di L. 10.000.000 con obbligazioni da L. 500, fruttanti il 4 %: l'emissione avviene a L. 480, il rimborso a 520. Il prestito dura 40 anni ed il suo servizio è fatto con annualità costanti.

Il prezzo complessivo di rimborso è L. 10.400.000.

Il tasso r_1 è dato dalla relazione

$$0{,}04 \cdot 500 = x \cdot 520 \quad x = 0{,}0384615$$

$$a = \frac{10.400.000 \cdot 0{,}0384615 \cdot 1{,}0384615^{40}}{1{,}0384615^{40} - 1} = 513.487{,}35.$$

Per avere il tasso effettivo applichiamo la formula del Montferrier; dove S deve rappresentare il prezzo d'emissione di L. 9.600.000.

$$q = \frac{2\,(a\,n - S)}{a\,n\,(n+1)} = \frac{2\,(513.487{,}35 \cdot 40 - 9.600.000)}{513.487{,}35 \cdot 40\,(40+1)} = 0{,}02598086$$

$$r = \frac{q}{1 - \dfrac{\dfrac{n+2}{3}\,q}{1 - \dfrac{n-1}{12}\,q}} = \frac{0{,}02598086}{1 - \dfrac{\dfrac{42}{3} \cdot 0{,}02598086}{1 - \dfrac{39}{12} \cdot 0{,}02598086}} = 0{,}0431058$$

Applicando la formula di Baily si trova $r = 0{,}0439546$.

La differenza tra i 2 risultati essendo troppo forte conviene fare la verifica; determinare cioè il valore di S che corrisponde alla rata precedente ed a ciascuno dei due tassi ora trovati ed, eventualmente, applicare la regola di falsa posizione.

Per $r = 0{,}0431058$ si ha $S = 9.710.044$ con un errore in più di L. 170.044.

Per $r = 0{,}0439546$ si ha $S = 9.591.670$ con un errore in meno di L. 8330.

Gli errori sono di segno contrario e la regola di falsa posizione dà per r il valore

$$r = \frac{0{,}0431058 \cdot 8330 + 0{,}0439546 \cdot 110{,}044}{8330 + 110044} = 0{,}0438949 \text{ } \textit{in eccesso.}$$

Questo ultimo risultato dà per S il valore di 9.599.924

e quindi è sufficientemente approssimato.

In queste formole approssimate a deve essere costante (non importa il modo come è composta), e può comprendere oltre l'interesse, imposte, premi ed altro.

121. — Se questo è il caso, per la determinazione di a, bisogna distinguere gli aggravi periodici che sono proporzionali al capitale debito residuo, dagli altri che sono fissi o si considerano tali. I primi, ridotti in percentuale del capitale, si aggiungono alla tassa nominale d'interesse ottenendo un tasso col quale si calcola la rata [1], gli altri aggravi si calcolano a parte e si aggiungono alla rata già determinata.

---

[1] Se sopra un capitale fruttifero sono da computarsi scalarmente, oltre all'interesse, degli aggravi periodici (per es. imposte) l'andamento dell'ammortamento è identico a quello che si avrebbe considerando debito ed acconti fruttiferi ad un tasso uguale alla somma del tasso d'interesse e di quelli, pure unitari, degli aggravi periodici.

Sia S la somma avuta a prestito, r il tasso di interesse, p la misura per unità di capitale degli aggravi periodici scalari. Siano $a_1\, a_2 \ldots a_n$ gli acconti distanti tra loro, ed il primo di essi dall'inizio del debito, di un periodo di tasso.

I residui debiti sono successivamente, facendo

$$r + p = r_1$$

$$R_1 = S + Sr + Sp - a_1 = S(1 + r + p) - a_1 = S(1 + r_1) - a_1$$

$$R_2 = R_1 + R_1 r + R_1 p - a_2 = R_1(1 + r + p) - a_2 =$$
$$= [S(1 + r_1) - a_1](1 + r_1) - a_2 = S(1 + r_1)^2 - a_1(1 + r_1) - a_2$$

$$R_3 = R_2 + R_2 r + R_2 p - a_3 = R_2(1 + r + p) - a_3 =$$
$$= [S(1 + r_1)^2 - a_1(1 + r_1) - a_2](1 + r_1) - a_3 =$$
$$= S(1 + r_1)^3 - a_1(1 + r_1)^2 - a_2(1 + r_1) - a_3$$

. . . . . .

$$R_n = R_{n-1} + R_{n-1} r + R_{n-1} p - a_n = R_{n-1}(1 + r + p) - a_n =$$
$$= [S(1 + r_1)^{n-1} - a_1(1 + r_1)^{n-2} - \ldots - a_{n-1}](1 + r_1) - a_n =$$
$$= S(1 + r_1)^n - [a_1(1 + r_1)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(1 + r_1) - a_n$$

Esempio. Per un prestito di 1 milione al 3 % il debitore paga pure la imposta di R. M. nella misura del 15 % sull'interesse e la tassa di circolazione sui titoli nella misura dell' 1,8 ‰ sul corso di borsa dei titoli residui (essendo ignoto il corso consideriamo il nominale — le obbligazioni non lo oltrepassano mai di molto, quindi la rata sarà nella massima parte dei casi in eccesso): *Poi dà ogni anno dei premi per una somma fissa 10.000.* La R. M. e la T. di C. entrano a formare il tasso % d' interesse.

Interesse %	3,00
R. M. 15 % su L. 3	0,45
T. di Circ. 1,8 ‰	0,18
	3,63

Tasso % con cui si calcola la rata. A questa si aggiungono le L. 10.000 fisse di premio.

Nella determinazione del tasso effettivo si deve tener conto di quest'ultima rata complessiva.

Altro esempio:

Un privato ottiene un mutuo da un istituto di Credito Fondiario mediante cartelle al 4 %, rimborsabile con 20 semestralità costanti, comprendenti l' interesse, i diritti di Commissione (all' Istituto) 0,24 % sul capitale debito residuo, il rimborso della R. M. 12 % sull' interesse, ed i diritti erariali (per abbonamento a tasse di registro, bollo ecc.) 0,10 % sul capitale mutuato. Nel calcolo dell'interesse lordo entrano soli: il diritto di commissione, ed il rimborso R. M.

Tasso nominale d'interesse	L. 4,00
Diritto di Commissione	» 0,24
Rimborso R. M. 12 % su L. 4	» 0,48
Tasso nominale complessivo	L. 4,72

Essendo convertibile 2 volte, la semestralità va calcolata in base al tasso $4{,}72 : 2 = 2{,}36$ %. Si ottiene $a = 6{,}186056$, a cui aggiungendo i diritti erariali in 0,05 si ha complessivamente per ogni 100 lire di capitale preso a mutuo una semestralità di 6,236056.

---

e se è $a_1 = a_2 = \ldots a_n = a$ si ha

$$R_n = S(1 + r_1)^n - a\,\frac{(1 + r_1)^n - 1}{r_1}$$

E se deve essere $R_n = 0$, cioè l'ammortamento completo

$$S(1 + r_1)^n = a\,\frac{(1 + r_1)^n - 1}{r_1}$$

da cui

$$a = \frac{S(1 + r_1)^n\, r_1}{(1 + r_1)^n - 1} \quad \text{c. d. d.}$$

Si supponga che la vendita delle cartelle sia avvenuta il 30 aprile ed abbia fruttato per cartella L. 480 netto da spese. Il ricavo percentuale è $480 : 5 = 96$, ed essendo la scadenza della prima rata il 1° luglio, le semestralità sono anticipate di 4 mesi. Perciò $t = -20 + \frac{4}{6} = -\left(19 + \frac{1}{3}\right)$

Applicando la formula di Baily, dove $S = 96$, $a = 6{,}236056$, $n = 20$, si ottiene $r_2 = 0{,}028327$ ed $r = 1{,}028327^2 - 1 = 0{,}05745$.

122. — Se il titolo si rimborsa in una sol volta in epoca determinata e frutta nel frattempo ad un tasso r riscuotibile posticipatamente, si può usare la seguente formola approssimata per il calcolo del tasso effettivo, dove C indica il capitale di rimborso, r il tasso nominale relativo, e V il corso o il prezzo d'emissione.

$$r_1 = \frac{b\,[2\,n\,C - (n+1)\,b]}{n\,C\,[2\,nC - (n+1)\,d]}$$ (se l'interesse è pagato posticipatamente)

dove $$b = n\,C\,r - (V - C)$$

e $$d = n\,C\,r - 2\,(V - C).$$

I valori di questa formola sono sufficientemente approssimati quando n non è grande e V poco diverso da C (quest'ultima condizione equivale a supporre r_1 poco diverso da r; infatti la formola, per $V = C$, dà $r_1 = r$).

Un Buono del Tesoro fruttante il 4 % pagabile a semestri posticipati sarà rimborsato fra 7 semestri. Il suo corso è 96 %. Determiniamo il tasso effettivo.

Applicando la formula precedente:

$$n = 7\ ,\ C = 100\ ,\ r = 0{,}02\ ,\ V = 96$$

$$b = 7 \cdot 100 \cdot 0{,}02 - (96 - 100) = 14 + 4 = 18$$

$$d = 7 \cdot 100 \cdot 0{,}02 - 2\,(96 - 100) = 14 + 8 = 22$$

$$r_1 = \frac{18\,[2 \cdot 7 \cdot 100 - (7+1)\,18]}{7 \cdot 100\,[2 \cdot 7 \cdot 100 - (7+1)\,22]} = \frac{18 \cdot 1256}{700 \cdot 1224} = 0{,}0264$$

cioè il 2,64 % al semestre. Da cui il tasso effettivo annuale

$$1{,}0264^2 - 1 = 0{,}05349\ ;\ \text{circa } 5{,}35\ \%.$$

Se l'interesse è pagato anticipatamente, vale, colle stesse avvertenze, quest'altra formola, dove b e d hanno il solito significato:

$$r_1 = \frac{b\,[2\,n\,C(1-r) - (n+1)\,b]}{n\,C\,(1-r)\,[2\,n\,C\,(1-r) - (n+1)\,d]}$$

da cui, se $V = C$ si ha

$$r_1 = \frac{r}{1-r}$$

123. — Se la rata che fa il servizio del prestito, non è costante ma in progressione geometrica si può determinare il tasso effettivo nel modo già detto in occasione delle periodicità in progressione geometrica. Se variano in altro modo si applica la regola di falsa posizione.

Se non si deve giudicare di *una data emissione*, ma confrontare tra loro per es. diverse proposte di sindacati di banchieri per scegliere la più conveniente, si può fare così: In base ad un tasso arbitrario determinare per ogni proposta il valore attuale di tutte le somme che si dovranno in avvenire pagare per essa ai creditori, e ridurre questa somma per 1 lira di netto ricavo d'emissione. Questi valori attuali relativi ad 1 lira di ricavo d'emissione si chiamano *parità* delle varie combinazioni proposte. Ed è evidente che converrà la proposta a cui corrisponde la parità minore. Occorre avvertire che il tasso da usare non è del tutto arbitrario, perchè se troppo alto, riducendo di molto il valore di somme lontane nel tempo, può fare apparire più convenienti di quello che realmente sono, i prestiti a lungo ammortamento, o, a parità di durata, quelli nei quali le somme da pagarsi sono più forti negli ultimi anni di durata del prestito che non nei primi. Il contrario avviene quando il tasso scelto è troppo basso.

Applicazione:

Un Comune vuole prendere a prestito la somma di 1.000.000; gli sono fatte due proposte:

1ª prezzo d'emissione $^{8}/_{10}$, tasso $3\,^{1}/_{2}$ %, durata anni 20.

2ª prezzo d'emissione $^{9}/_{10}$, tasso 4 %, durata anni 16.

Trovare l'offerta più conveniente; tasso di valutazione 5 %.
Il servizio del prestito è fatto con annualità costante.
1ª proposta:

$$a_1 = \frac{1.000.000 \cdot 0{,}035 \cdot 1{,}035^{20}}{1{,}035^{20} - 1} = 70.361{,}22.$$

Valore attuale di 20 annualità immediate di 70.361,22 al tasso del 5 %

$$S_1 = 70.361{,}22 \cdot \frac{1}{1{,}05^{20}} \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} = 876.856{,}20.$$

Il ricavo dell'emissione di 1.000.000 all'8 % è 800.000.
Il valore di S_1 corrispondente ad una lira di ricavo è

$$\frac{876.856{,}2}{800.000} = 1{,}09607.$$

2ª proposta:

$$a_2 = \frac{1.000.000 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^{16}}{1{,}04^{16} - 1} = 85.820{,}15.$$

Valore attuale di 16 annualità immediate di 85.820,15

$$S_2 = 85.820{,}15 \frac{1}{1{,}05^{16}} \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1}{0{,}95} = 930.099{,}13.$$

Il valore di S_2 corrispondente ad una lira di netto ricavo è

$$\frac{930.099{,}13}{900\,000} = 1{,}0334.$$

Delle due parità è minore x_2 e quindi conviene la seconda proposta. Volendo il Comune riscuotere circa un milione, emetterà 2223 obbligazioni da L. 500 per un nominale di L. 1.111 500, a 450 ricavando L. 1.000.350.
Per questo prestito il tasso effettivo determinato colla formula di Baily è del 5,47 %.

124. — Il modo con cui il debitore intende estinguere il prestito è messo in evidenza da un *piano d'ammortamento* che fa vedere come si ripartisce la rata che fa il servizio del prestito. Sia questa rata costante oppure variabile occorre nel predisporre il piano tener conto della divisione del capitale debito in *obbligazioni* indivisibili. Le quote di capitale *effettive* devono essere multipli esatti del prezzo di rimborso dei titoli e differiscono da quelle *teoriche* di una somma minore dell'importo di una obbligazione.

Supponiamo che il prestito di L. 40.000 al 4 % rimborsabile con 5 annualità costanti, già portato per esempio nel capitolo delle periodicità, sia diviso in 80 obbligazioni da L. 500 ciascuna.
La rata teorica è già stata determinata in L. 8.985,08. Le quote di capitale teoriche vengono in pratica così trasformate:

Quota teorica	*Obbl. rimborsate*	*Importo (q. effettiva)*
7.385,08	15	7.500
7.680,48	15	7.500
7.987,70	16	8.000
8.307,21	17	8.500
8.639,50	17	8.500
39.999,97	80	40.000

In qualche caso si avrà un residuo di rata che in uno coi suoi interessi aumenterà la rata successiva, in qualche altro si avrà un residuo *negativo* che unitamente ai suoi interessi diminuirà la rata seguente.

Se non si bada al residuo, il piano assume questa forma:

PIANO D'AMMORTAMENTO
del prestito di 80 obbligazioni da L. 500 al 4 % in anni 5
annualità teorica = 8985,08.

Rate	Debito residuo		Interesso 4 % sul debito residuo	Ammortamento		Rata effettiva 4 + 5
	Importo	Obbl.		Importo	Obbl.	
1	2	3	4	5	6	7
1	40000	80	1600	7500	15	9100
2	32500	65	1300	7500	15	8800
3	25000	50	1000	8000	16	9000
4	17000	34	680	8500	17	9180
5	8500	17	340	8500	17	8840
				40000	80	

Volendo tener conto dei residui, il piano avrebbe quest'altra forma, più dimostrativa.

Rate	Rata disponibile = rata teorica 8985,08 ± residui e loro interessi			Debito residuo		Interessi 4 % sul deb. res.	Ammortamento		Rata effettiva (7 + 8)	Residuo (4 − 10)
	Residui	Interesse 4 %	Totale (a + 2 + 3)	Importo	Obblig.		Importo	Obblig.		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	—	—	8985,08	40000	80	1600	7500	15	9100	— 114,92
2	— 114,92	— 4,60	8865,56	32500	65	1300	7500	15	8800	+ 65,56
3	+ 65,56	+ 2,62	9053,26	25000	50	1000	8000	16	9000	+ 53,26
4	+ 53,26	+ 2,13	9040,47	17000	34	680	8500	17	9180	— 139,53
5	— 139,53	— 5,58	8839,97	8500	17	340	8500	17	8840	— 0,03
							40000	80		

Se la rata è divisa in altre parti oltre all'interesse e all'ammortamento, la forma è più tabellare.

Prestito a tasso netto per i portatori dei titoli.

Un prestito di 2000 obbligazioni da L. 500 al 3 % netto, più L. 10000 annue, nette, di premio, rimborsabile in 5 anni con annualità costante comprendente la imposta di R. M. 15 % sull'interesse e sul premio e la tassa di circolazione 1,80 ‰ sui titoli residui.

Tasso netto 3,—
R. M. 0,45
T. C. 0,18

Tasso lordo 3,63 %

col quale si calcola la rata e si ottiene L. 222.297,60
cui si deve aggiungere la somma costante
del premio L. 10.000
e relativa R. M. » 1.500 L. 11.500,—
annualità teorica complessiva L. 233.797,60

Rate	Debito residuo		Riparto della rata teorica a = 233797,60							Ammontare effettivo		Rata effettiva (9 + 11)
	Importo	Obblig.	Interesse 3 % sul D. R.	R. M. 15 % sull'Interesse	T. C. 1,8 ‰ sul D. R.	Totale (4 + 5 + 6) int. 3,63 su D. R.	Premio e R. M. relativa	Totale segnavi periodici 7 + 8	Somma disponibile per l'ammortamento (a − 9)	Importo	Obblig.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1000000	2000	30000	4500,—	1800,—	36300,—	11500	47800,—	185997,60	186000	372	233800,—
2	814000	1628	24420	3663,—	1465,20	29548,20	11500	41048,20	192749,40	192500	385	233548,20
3	621500	1243	18645	2796,75	1118,70	22560,45	11500	34060,45	199737,15	199500	399	233560,45
4	422000	844	12660	1899,—	759,60	15318,60	11500	26818,60	206979,—	207000	414	233818,60
5	215000	430	6450	967,50	387,—	7804,50	11500	19304,50	214493,10	215000	430	234304,50
										1000000	2000	

Prestito a tasso lordo. Ai portatori delle obbligazioni spetta quello che resta dopo aver pagato le tasse. Il calcolo della rata si fa — come sopra — al tasso lordo; il piano d'ammortamento ha la forma seguente.

Sia un prestito al 6 % lordo, di 400 obbligazioni da L. 500, ammortizzabili in 5 anni. Siano a carico dei portatori dei titoli la R. M. del 20 % sull'interesse e la T. di C. del 3,5 ‰ sui titoli residui.

Tasso lordo 6
Meno: R. M. 20 % L. 1,20
T. d. C. » 0,35 1,55
Tasso netto per i creditori 4,45 %

La rata si calcola al 6 %. Si ha $a = 47479{,}28$.

Rate	Debito residuo		Riparto della rata teorica 47479,28					Ammortam. effettivo		Rata effettiva (4 + 9)
	Importo	Obblig.	Int. lordo 6 % sul D. R.	R. M. 20 % sull'inter.	T. C. 3,5 ‰ sul D. R.	Int. netto ai creditori 4,45 % (5 + 6)	Somma disponibile per l'ammortamento (a − 4)	Importo	Obblig.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	200000	400	12000	2400	700,—	8900,—	35479,28	35500	71	47500
2	164500	329	9870	1974	575,75	7320,25	37609,28	37500	75	47370
3	127000	254	7620	1524	444,50	5651,50	39859,28	40000	80	47620
4	87000	174	5220	1044	304,50	3871,50	42259,28	42500	85	47720
5	44500	89	2670	534	155,75	1980,25	44809,28	44500	89	47170

125. — *I corsi o quotazioni dei listini di Borsa* hanno diverso significato secondo gli usi di Borsa.

Anzitutto il corso può riferirsi al titolo di taglio minimo, qualunque sia il suo valore nominale, oppure riferirsi a 100 unità di valor nominale. Seguono la 1ª pratica le nostre Borse (eccezion fatta per alcuni Buoni del Tesoro) e quelle inglesi e francesi, seguono la 2ª quelle tedesche ed olandesi.

Il titolo circola unitamente alla cedola esigibile alla prossima scadenza (salvo nei giorni che la precedono immediatamente — corso ex-cedola —) ed il suo corso può comprendere anche il valore della cedola fino alla data del corso, oppure no. Il primo corso si dice *corso tel quel* (1), *e rappresenta il*

(1) Espressione che si usa tutte le volte che si vuol indicare che un corso segnato in un listino deve essere pagato *tale e quale*, cioè non è una quotazione convenzionale.

prezzo del titolo, cioè la somma che occorre spendere per acquistarlo in quel dato giorno e sostituirsi, in tutti i diritti relativi, al venditore.

Se il corso non comprende il valore della cedola si dice *corso secco, e rappresenta il costo del titolo, oppure il capitale realmente investito nell'acquisto stesso.*

Esempio. Compero al 18 luglio 1914 una cartella di R. I. 3 $^1/_2$ % a 95,10 (tel quel). Gli interessi sul titolo si riscuotono il 1° gennaio ed il 1° luglio. Da oggi divento proprietario del titolo e maturano a mio favore gli interessi fino alla scadenza del 1° gennaio per giorni 166, ed il frutto che realmente mi spetta è di circa L. 1,60. Ma al 1° gennaio riscuoterò l'intera cedola di L. 1,75, cioè anche gli interessi che avrebbero dovuto fruttare a favore del venditore fino al giorno dell'acquisto, L. 0,15 circa (dal 1° al 18 luglio).

Perciò acquistando il titolo anticipo al venditore questi interessi e ne sono rimborsato alla scadenza della cedola. Concludendo: il titolo pagato 95,10 mi costa effettivamente 95,10 — 0,15 = 94,95, e questa somma rappresenta dunque il capitale investito nel titolo.

Il corso è tel-quel nelle borse inglesi francesi e nelle nostre (eccezion fatta per alcuni pochi titoli, cartelle fondiarie, Buoni del Tesoro e qualche altro, per i quali ricorre la frase: *più interessi* od altra equivalente).

Il corso è secco nelle borse tedesche (per i titoli a reddito fisso) in quelle olandesi e austriache per tutti (per avere il corso t. q. delle azioni si calcolano interessi convenzionali sul capitale versato, dal giorno dell'ultimo pagamento di dividendo, al 4 o 5 % secondo il titolo) (1).

126. — Vi sono valori mobiliari che hanno un mercato internazionale e sono quotati in borse fuori dello Stato nella

(1) Si può chiedere quale delle numerose pratiche di borsa riguardo alla espressione dei corsi nei loro listini dei titoli sia la più razionale. Due sono i punti di vista più generali da cui si può considerare la questione:

1°. Il corso indichi il valore di un titolo alla data del listino.

Il corso dovrebbe essere allora il corso tel quel per il titolo di taglio minimo, detratto il non versato.

2°. Il corso dia invece il mezzo più pronto per l'*apprezzamento* dei titoli, assoluto o relativo, il confronto dei corsi di date diverse per uno stesso titoto, dei corsi di titoli diversi alla stessa data.

In questo caso è più appropriato il corso secco percentuale, detratto il non versato.

moneta del quale sono pagabili. Essi possono essere quotati: 1° nella moneta della piazza di borsa; 2° nella moneta in cui sono pagabili. In questo 2° caso per la conversione in moneta di conto della piazza, ed anche nel 1° per calcolare gli interessi quando le quotazioni sono al secco, si usano *cambi fissi* e non i cambi della giornata, non volendo aggiungere un altro elemento di variazione a quelli già numerosi che agiscono sui corsi.

Questi cambi fissi sono le parità teoriche tra le unità monetarie, opportunamente arrotondate. Es. M. 80 = 100 L. Fr., M. 96 = 100 Kr. (Austr.). Fr. 25,25, oppure 25,20 = 1 Lst. $ 5 = 1 Lst.

Possono essere diversi da titolo a titolo.

Quotano in moneta propria le piazze austriache, in moneta estera le altre.

Per le azioni non interamente liberate il corso può riferirsi al titolo come è, oppure a quello interamente liberato. La *differenza* tra le due quotazioni è la somma non versata e le quotazioni *non sono proporzionali.*

Segue la 1ª via la borsa di Londra, l'altra le rimanenti borse, qualcuna (Amsterdam) quota soltanto azioni interamente liberate.

Da quanto precede si vede che la lettura d'un listino non è punto facile.

I prezzi segnati possono essere (come si vedrà più avanti) *per contanti,* oppure riferirsi a contratti che avranno esecuzione più tardi, per es. *fine mese.*

Per enunciare la quantità di titoli contrattati, per i prestiti perpetui, in Francia e da noi si indica la rendita lorda annua complessiva, per es. L. 1500 R. I. 3 % corrispondono L. 50.000 di nominale. Per gli altri titoli si indica il numero dei titoli di taglio minimo, per qualcuno il nominale (es. buoni del tesoro). Nelle altre borse è più usata l'indicazione del valor nominale complessivo. Es. L. 40.000 azioni Banca Commerciale Italiana.

127. *Alcuni calcoli.*

I. *Dato il corso t. q. di un titolo in un dato giorno, calcolare il secco, o viceversa.*

Esempio. La R. I. 3 ½ % il 20 marzo 1914 è a 95,20 t. q.; trovare il secco.

Il 3 ½ % ha godimento 1° gennaio e 1° luglio. Dal 1° gennaio al 1° luglio sono giorni 181, la cedola semestrale è 3,75; dal 1° gennaio al 20 marzo sono giorni 78; il valore della cedola al 20 marzo si avrà così:

$$181 : 78 = 1{,}75 : x \ , \ x = 0{,}75$$

quindi, corso secco = 95,20 — 0,75 = 94,45.

Altri esempi.

Alla Borsa di Berlino, il 20 marzo 1914 la R. I. 3 ½ % è quotata 94,45. Trovare il prezzo in M. di un titolo da 3,50 di rendita. Cambio fisso M. 80 = 100 L.

94,45 è c. secco. Gli interessi dal 1° gennaio al 20 marzo per giorni 80, calcolati come sopra, sono L. 0,77.

$$\text{Corso } t.\ q. = 94{,}45 + 0{,}77 = 95{,}22 \text{ (in L.)}$$

$$95{,}22 + 8{,}0 : 100 = M\ 76{,}176.$$

Alla Borsa di Vienna una obbligazione di Fr 500 nominali di una società francese è quotata 425 al 15 agosto. Godimento 1° aprile e 1° ottobre. Il corso è in *Kr* e secco. Cambio fisso 96 *Kr* = 100 *frs*. Dal 1° aprile al 15 agosto sono giorni 131 (Vienna conta per i valori mobiliari 30 giorni al mese). Abbiamo

corso secco *Kr*	425,—
int. 4 % per giorni 131, s/ 500 *frs*	
frs 7,277 a 0,96 *Kr*	6,99
Kr	431,99

II. *Confrontare i corsi di un titolo a date differenti.*

Esempio. La R. I. 3 % era al 25 febbraio 1914 a 65, al 10 giugno a 64,70 t. q.

Questo tipo di rendita ha godimento 1° aprile e 1° ottobre, cosicchè nel 1° corso son compresi gli interessi dal 1° ottobre al 25 febbraio, e nel 2° quelli dal 1° aprile al 10 giugno. È evidente che così come sono i corsi non si possono confrontare. Riduciamoli al secco.

Dal 1° ottobre al 25 febbraio sono giorni 147, fino al 1° aprile giorni 182.

Dal 1° aprile al 10 giugno sono giorni 70, fino al 1° ottobre giorni 183.

La cedola semestrale del 3 % (lordo) è di 1,20 (netto), e gli interessi alle date dei corsi saranno rispettivamente

$$182 : 147 = 1{,}20 : x_1 \ , \ x_1 = 0{,}97$$
$$183 : 70 = 1{,}20 : x_2 \ , \ x_2 = 0{,}46$$

Ed i corsi secchi saranno:

$$\text{al 25 febbraio } 65 - 0{,}97 = 64{,}03$$
$$\text{al 10 giugno } 64{,}70 - 0{,}46 = 64{,}24.$$

Il titolo costa di più al 10 giugno per L. 0,21.

Considerando i semestri uguali a 180 giorni ed i mesi di 30 giorni si sarebbe potuto semplificare il calcolo, riducendo uno dei corsi t. q. dati a comprendere tanto interessi come l'altro, cioè sottrarre dal corso del 25 febbraio 145 — 69 = 76 giorni di interesse, od aggiungerli al corso del 10 giugno.

$$180 : 76 = 1{,}20 : x \quad x = 0{,}51$$
$$65 - 0{,}51 = 64{,}49$$
$$64{,}70 - 64{,}49 = 0{,}21 \text{ come sopra.}$$

Se i corsi si riferiscono a differenti semestri e le date *si corrispondono*, cioè distano di ugual numero di giorni dal rispettivo *godimento*, gli interessi compresi nei corsi saranno uguali e la differenza tra i corsi secchi uguale a quella tra i corsi t. q.

Date corrispondenti esistono solo per titoli perpetui.

Per titoli rimborsabili occorrerebbe determinare il *tasso d'investimento* (come sarà detto al numero seguente) per uno dei corsi dati ed in base ad esso calcolare le *parità* dello stesso titolo alle date degli altri corsi.

128. — Coloro che acquistano valori mobiliari per impiego durevole dei loro capitali, dopo appurata la sicurezza dell'impiego, si propongono un problema analogo a quello considerato già dall'ente debitore (trattandosi di titoli di prestiti), cioè la ricerca del *tasso effettivo d'impiego dei loro capitali.*

È palese che una tale ricerca preventiva è impossibile per i titoli a frutto variabile senza alcuna regola, come le *azioni ed i buoni di godimento.*

Per gli altri titoli si deve osservare che il creditore non riscuote tutte le somme che il debitore deve pagare per il servizio del prestito, ma una parte soltanto, e che perciò il tasso d'impiego è minore che per il debitore.

a) I titoli di prestiti perpetui possono considerarsi come rappresentativi di *perpetuità* ed il tasso si può ottenere con le formole a queste relative. Bastando una relativa approssimazione si può adoperare la 1ª formola:

$$r = \frac{a}{S - akm}$$

dove si può osservare che è quasi sempre $0 < k < 1$, perchè i titoli sono contrattati generalmente in uno colla cedola in corso di maturazione; ed S è il prezzo, a la cedola netta.

Il calcolo viene elementarmente spiegato così: si determina dapprima il *costo* effettivo del titolo (corso secco), poi, considerando il frutto periodico come interesse prodotto dal

corso secco nel periodo di tempo in cui maturano le cedole, si calcola il tasso $^0/_0$ corrispondente.

$S - akm$ è appunto il corso secco.

Esempio. La R. I. 3 $^1/_2$ $^0/_0$ è quotata il 31 agosto L. 94 in Italia. Interessi maturati dal 1° luglio — giorni 61.

$183 : 61 = 1{,}75 : x$; $x = 0{,}5833$; corso secco $= 94 - 0{,}5833 = 93{,}4167$.

In un semestre il capitale di 93,4167 produce 1,75 di frutto, il tasso semestrale sarà

$$r = \frac{I}{C_0 n} = \frac{1{,}75}{93{,}4167} = 0{,}0187332.$$

Cogli stessi dati, nel capitolo delle perpetuità, si è già trovato

$$x = 0{,}0187326.$$

Analogamente, coi dati delle applicazioni precedenti (essendo la cedola del consolidato perpetuo 3 $^0/_0$ lordo, L. 1,20), nel 1° caso si ha un tasso semestrale come segue:

$$r = \frac{1{,}20}{64{,}03} = 0{,}01874$$

e nel secondo caso

$$r = \frac{1{,}20}{64{,}24} = 0{,}01868.$$

Se si tratta di due o più titoli di identica rateazione di frutto, per es. semestrale, per il semplice giudizio sulla maggiore convenienza relativa basta confrontare i tassi semestrali ottenuti.

Se invece la rateazione è diversa, per es. per un titolo semestrale e per l'altro trimestrale, il confronto non si può direttamente fare, essendo evidente che una rateazione trimestrale dei frutti è più conveniente di una rateazione semestrale. Perciò si devono riferire i tassi allo stesso periodo, trovando di essi *tassi equivalenti relativi al tempo prescelto* (generalmente l'anno).

b) Titoli rimborsabili entro un tempo determinato.

Se il prezzo di rimborso è fissato occorre tener conto della differenza tra il valore di rimborso ed il costo, essendo evidente che una differenza positiva molto rilevante (premio di rimborso), può largamente compensare la tenuità del frutto periodico. Se il rimborso avviene per somma minore del costo, la perdita riduce il tasso effettivo a meno di quello periodico.

Se il pagamento ai creditori, del frutto periodico e del rimborso dei titoli avviene con annualità determinate, si considera il titolo come una parte aliquota dell'intero prestito ed il prezzo suo attuale come ricavo d'emissione, calcolando quindi il tasso effettivo come si fa per l'ente debitore.

Se la periodicità che fa il servizio del prestito non è, *per ciò che riguarda la parte di essa riscossa dai creditori*, costante, il calcolo può essere più sollecito procedendo per tentativi (regola di falsa posizione).

Se il valore di rimborso non si conosce o non si conosce l'epoca in cui esso dovrebbe avvenire, il calcolo del tasso è impossibile.

Trattandosi poi di *scegliere fra parecchi titoli* non è necessaria la ricerca del tasso effettivo di ciascuno di essi, ma basta calcolarne la *parità* in base ad un tasso arbitrario (quello corrente del mercato del denaro) riferendole ai prezzi attuali di essi. Conviene naturalmente il titolo a cui corrisponde la parità (in percentuale del prezzo) maggiore.

Si deve in proposito osservare che, fondando il giudizio della bontà di un titolo sul solo tasso effettivo come è stato definito al N. 119, si viene a considerare come fruttifere a quel tasso, fino alla estinzione del titolo, tutte le somme che per qualunque ragione su di esso si riscuotono, mentre è evidente che, dovendole reimpiegare in differenti momenti, i tassi d'interesse relativi saranno in generale differenti tra loro e dall'effettivo. Specialmente se la vita del titolo è breve il criterio della parità la vince su quello del tasso effettivo, essendo allora minori le incertezze sul valore medio del tasso d'interesse normale, nel prossimo futuro.

129. *Calcolo del buono d'opzione.* — Una società anonima le cui azioni sono quotate a 560 emette nuove azioni riservate ai soci alla pari di 500, in ragione di 3 azioni nuove per 7 azioni vecchie. Un socio che non può o non vuole esercitare il diritto di opzione lo potrà vendere per una certa somma.

Facendo il caso generale, se m è il numero delle azioni vecchie che si deve possedere per acquistarne n nuove, si può ammettere come evidente che le azioni vecchie dopo esercitato il diritto di opzione valgano quanto costano le nuove. Se C è il valore di borsa delle vecchie dopo stabilita la emissione, e C' il prezzo d'emissione delle nuove, x il prezzo del buono di opzione, si ha che $C - x$ è il valore delle azioni vecchie dopo esercitato il diritto d'opzione, $n\,C' + m\,x$ è il costo di n azioni nuove per le quali occorrono m buoni, ed

$$\frac{n\,C' + m\,x}{n}$$

è il costo di una. Quindi si ha

$$C - x = \frac{n\,C' + m\,x}{n}$$

$$x = \frac{(C - C')\,n}{m + n}.$$

Nel caso di $n = 1$ cioè quando si ha 1 azione nuova per m vecchie

$$x = \frac{C - C'}{m + 1}.$$

Nell'esempio proposto $m = 7$, $n = 3$

$$x = \frac{(560 - 500)\,3}{7 + 3} = 18.$$

130. — Nelle operazioni sui titoli occorre tener presenti le *spese*.

Notiamo le più usuali: la *mediazione* dovuta agli agenti di cambio, calcolata ad un tanto % o ‰ sull'importo vero del contratto o sul nominale, o ad un tanto per titolo; le *tasse* sui *contratti* di borsa fisse o graduali, eventualmente anche il *bollo* da applicare ai titoli quando questi entrino per la prima volta in uno Stato diverso da quello d'origine; spese *diverse* di posta, telegrafo, assicurazione ecc.

Queste spese sono in tutto od in parte differenti da piazza a piazza anche dello stesso Stato e perciò il confronto dei corsi dei listini non può far decidere sull'opportunità di una operazione.

A seconda che si tratta di acquisto o di vendita si dovranno aggiungere o togliere tutte le spese che l'operatore deve fare per avere i titoli od il netto ricavo a sua disposizione. Quando per un dato operatore e per una data operazione le quotazioni di un titolo su due piazze danno risultati uguali si dice che quelle quotazioni sono *equivalenti*.

Supponendo un acquisto, dati i corsi c e c' e le spese rispettivamente s ed s', le quotazioni saranno equivalenti se $c + s = c' + s'$, e se un corso non è noto e si vuol determinare in modo che risulti equivalente $c' = c + s - s'$.

Supponendo una vendita, si avrà l'equivalenza se $c - s = c' - s'$, e volendo trovare una delle quotazioni $c' = c - s + s'$.

Esempio. A Berlino la R. I. 3 ½ % è quotata a 94,45 il 20 marzo 1914. Il cambio Italia Berlino sia 124 vista, la mediazione ½ ‰ e l'imposta di borsa ²/₁₀ ‰ sul nominale. Trovare il corso equivalente in Italia per un operatore italiano, sia per l'acquisto che per la vendita, supposto che in Italia la mediazione sia di ¾ ‰ sul corso effettivo. Le spese di posta con Berlino sono del 1 ‰ sul nominale.

Riduciamo t. q. il corso della R. I. a Berlino

corso secco	L.	94,45
int. dal 1° genn.	»	0,77
	L.	95.22

$$95{,}22 \cdot 0{,}8 \text{ (cambio fisso)} = M\ 76{.}176$$

Le spese sono:

Mediazione ½ ‰	sul nominale di	M 80	= L.	100	M	0,04
Imposta ²/₁₀ ‰	»	»	»	»	»	0,016
Posta 1 ‰	»	»	»	»	»	0,08
					M	0,136

e per quello che è stato detto sui corsi equivalenti

per l'acquisto			per la vendita		
	M	76,176		M	76,176
+ spese	»	0,136	— spese	»	0,136
	M	76,312		M	76,040
$76{,}312 \cdot \frac{124}{100}$ =	L.	94,627	$76{,}04 \cdot \frac{124}{100}$ =	L.	94,29
meno mediaz. in Italia	»	0,071	*più* mediazione in Italia	»	0,071
corso equivalente	L.	94,556	corso equivalente	L.	94,361

Bisogna osservare che in Italia esiste una tassa sui contratti di Borsa, riscossa colla vendita di fogli bollati, e di

essa non si può tener conto che supponendo un acquisto od una vendita *di un determinato quantitativo di titoli*; essa influisce sul risultato nello stesso senso della mediazione in Italia.

Quando basta una relativa approssimazione nei risultati si possono ridurre le spese in percentuali dell'importo dell'affare: i calcoli si semplificano e si può applicare con vantaggio la regola congiunta.

Sia il corso in Italia delle azioni Banca Commerciale, a 930, il 10 luglio. Calcolare il corso equivalente ad Amsterdam alla stessa data essendo il cambio Italia Olanda 208 vista; cambio fisso ad Amsterdam fl 0,5 per L. Interessi convenzionali 4 % dal 31 marzo. Spedizione in Italia ½ ‰, altre spese, complessive 1 ‰ (Amsterdam quota in percentuale e secco).

L di corso t. q. ad Amst. x	100 L di valore nominale
L nominali 500	930 L corso t. q. in Italia
L 208	100 *fl* (cambio I. O.)
fl 0,5	1 L di corso (c. f.)

$L\,x = 178{,}8461$

Considerando il caso dell'acquisto, per trovare il corso equivalente ad Amsterdam dobbiamo aggiungere le spese in Italia e togliere quelle ad Amsterdam. Nel caso del corso equivalente per la vendita, togliere le spese in Italia ed aggiungere quelle di Amsterdam. Complessivamente, essendo le spese in Italia ½ ‰ e le altre 1 ‰, si toglierà nel caso dell'acquisto il ½ ‰ e si aggiungerà nel caso della vendita.

½ ‰ su 178,8461 = 0,0894.

Per l'acquisto		Per la vendita	
178,8461		178,8461	
— 0,0894		+ 0,0894	
178,7567		178,9355	
	meno gli interessi dal 31 marzo al 4 % per giorni 100 su L. 100		
— 1,1111		— 1,1111	
177,6456	corso secco ad Amst.	177,8244	

131. *Scelta della piazza più conveniente per vendere un titolo o per acquistarlo.* — Nel caso dell'acquisto si deve supporre di volere il titolo a nostra disposizione in uno stesso luogo, nel caso di vendita lo stesso per il ricavo netto.

Esempio. I corsi delle azioni di una certa società italiana siano il 20 agosto 1913 i seguenti: a Milano 930, ad Amsterdam 178 %, a Vienna 880. Interessi convenzionali 4 % a Vienna e ad Amsterdam, dal 31 marzo, sul nominale di L. 500. Spese: 1 ‰ a Milano, 1 ½ ‰ ad Amsterdam, ½ ‰ a Vienna sull'importo del contratto più Kr 0,04 per titolo. Cambi fissi L 1 = fl 0,5 = Kr 0,96. Cambi correnti di Milano sull'Olanda 208 vista, di Vienna sull'Italia 95,50 vista.

Supposto un banchiere di Milano, trovare dove gli conviene comperare o vendere.

A Milano.

Acquisto		Vendita	
Corso	930,—	Corso	930,—
+ spese 1 ‰	0,93	— spese 1 ‰	0,93
	930,93		929,07

Ad Amsterdam.

Corso secco	L. 178,— %
+ int. su 100 dal 31 marzo al 4 % per giorni 140	» 1,555
Corso t. q.	L. 179,555

Costo o ricavo lordo per titolo $L\,x$	500 L valore nominale
L di valore nominale 100	179,555 L corso t. q. ad Amsterdam
L di corso 1	0,5 *fl* (corso fisso)
fl 100	208 L cambio corrente

$x = 933{,}6881$

Acquisto		Ricavo	
	933,688		933,688
+ ½ ‰ ad Amst.	0,467	— 1 ½ ‰	1,401
1 ‰ a Milano	0,934		932,287
	935,089		

A Vienna.

Il corso è in *Kr* e secco *Kr*	880,—
+ int. 4 % su L. 500 nom. dal 31 marzo sono L. 7,777 che al c. f. di 0,96 diventano	» 7,466
corso t. q. *Kr*	887,466

Acquisto		Vendita	
	Kr 887,466		*Kr* 887,466
+	» 0,04	spese *Kr* 0,04	
½ ‰ altre spese	» 0,444	½ ‰	» 0,444 » 0,484
	Kr 887,950		*Kr* 886,982
887,95 · 100 : 95,5 =	L. 929,79	886,982 · 100 : 95,5 =	L. 928,777

Converrebbe quindi vendere ad Amsterdam ed acquistare a Vienna; eseguendo entrambe le operazioni simultaneamente si guadagnerebbe per titolo

L. 932,287 — 929,79 = L. 2,497.

Data l'esistenza delle spese, sono più frequenti i casi in cui il massimo ricavo è minore del minimo costo; la speculazione ultima accennata è quindi raramente possibile.

132. *I valori mobiliari ed il cambio.*

I titoli cosidetti *internazionali*, ad es. le rendite di alcuni Stati e le azioni od obbligazioni di alcune grandi banche o società ferroviarie, essendo facilmente negoziabili ed avendo un corso relativamente fermo, si prestano a servire quale mezzo per i pagamenti internazionali, in qualche caso più conveniente degli effetti cambiari. Meglio ancora del *titolo*, che si realizza ad un corso impossibile a precisarsi (salvo accordi precedenti), servono le *cedole* degli interessi o dividendi scaduti, perchè sono sollecitamente pagabili in somma determinata. Naturalmente la cosa varia secondo il modo in cui la cedola viene pagata: ad es. solo nel luogo di origine, oppure anche in altre piazze, a cambio fisso, oppure della giornata, ecc.

Esempi. Il 15 luglio il corso della R. I. 3 ½ % è in Italia 95,80, a Parigi 95,50. Trovare il corso equivalente del cambio, oppure, ciò che è lo stesso, la parità di 100 fr riscossi o pagati con la trasmissione di rendita. Spese 1 ‰.

L lorde x	100 *fr* vista
fr vista 95,50	1 titolo da 3 ½ rend.
titoli 1	95,80 *L*

$x = 100{,}314$

e, volendo tener conto delle spese, $100{,}314 \pm 1$ ‰.

Determinare se, essendo il cambio su Amsterdam 203 vista, convenga per l'Italia la cambiale o le azioni Banca Commerciale per pagare un debito a vista su Amsterdam. Le azioni sono quotate, il 10 agosto, in Italia 950, in Amsterdam 180 %, interesse 4 % dal 31 marzo, c. f. L. 1 = *fl* 0,5. *Valore nominale dell'azione 500 lire. Spese 1 ‰.*

Corso secco ad Amsterdam 180 · 5(00) = L. 900
int. 4 % su 500 L. dal 31 marzo, g. 140 » 14
corso t. q. L. 914

L di spesa x	100 *fl* vista
fl vista 0,5	1 *L* (c. f.) di corso
ad Amsterdam *L* 914	1 azione
azioni 1	950 *L* corso in Italia
L 1000	1001 *L* colle spese

$x = L\ 208{,}08$.

Conviene la rimessa cambiaria.

Quando un titolo ha le cedole pagabili all'estero in moneta estera, ad un cambio fisso, si verifica, nel caso di alto cambio sull'estero, l'incetta all'interno, da parte di speculatori, delle cedole di prossima scadenza, per mandarle alla riscossione all'estero e poter trarre e vendere divisa estera, mentre il debitore delle cedole dovrà comprare divisa per rimetterla ai banchieri incaricati del pagamento delle cedole. In tal modo la differenza fra il cambio effettivo ed il pari va a profitto dello speculatore ed a carico del debitore.

Ad evitare tale manovra, usa talvolta il debitore di anticipare il pagamento delle cedole all'interno, ed è facile determinare, per un dato corso del cambio, il giorno in cui l'anticipazione equilibra l'effetto del cambio. In casi gravi si stabilisce che per il pagamento delle cedole occorre la presentazione dei titoli (rendendo così impossibile l'incetta delle cedole) e la prova o l'attestazione solenne mediante giuramento di esserne legittimi proprietari (*affidavit*). A questa formalità devono ancora ricorrere quegli Stati che, imponendo delle imposte speciali sul reddito dei valori mobiliari, ne dichiarano esenti i titoli posseduti all'estero da stranieri colà residenti, o da altri in date circostanze.

133. — Si è accennato alle Borse dei titoli. I contratti che vi si fanno sono *a contanti* od *a termine* a seconda che la consegna del titolo ed il pagamento del prezzo avvengono al momento della stipulazione del contratto od entro un breve termine (anche qualche giorno), oppure sono rimandate ad epoche determinate, fisse, generalmente in numero di 1 o 2 a mese (*liquidazioni di Borsa*).

I contratti a contanti sono fatti da coloro che vogliono investire o realizzare i loro capitali; un acquisto a contanti

non ha altro rischio che quello dipendente dalla solidità del titolo; un utile od una perdita sul capitale si realizzerà alla rivendita, ed è, generalmente parlando, in facoltà del possessore la scelta del tempo e del luogo di realizzo. I contratti a termine sono invece principalmente, non esclusivamente, di speculazione. Una volta fissate le condizioni del contratto, il risultato dipenderà dai corsi che avranno i titoli al giorno di liquidazione. Il compratore spera in un rialzo dei corsi (specula al rialzo è un *rialzista*), il venditore invece spera in un ribasso (*ribassista*) ed entrambi, se possono, cercano con acquisti o vendite artificiose (e talora con manovre illecite, incetta, false notizie — *reato di aggiotaggio* —) di far sì che i corsi prendano un andamento favorevole ai proprii interessi.

La quantità dei contratti a termine su di un dato titolo, può essere molto superiore a quella dei contratti a contanti, perchè, per concludere un contratto non è necessario alle parti di avere alla stipulazione di esso, l'una i titoli, l'altra il mezzo per pagarli (*operazioni allo scoperto*). Il mercato a termine è dunque un mercato più vasto e reagisce meno rapidamente di quello a contanti.

Si è detto che i contratti a termine sono *non esclusivamente* di speculazione. Ci sono infatti dei casi in cui l'uso di contratti a termine può essere dalla convenienza imposto anche al più prudente operatore. Se si ha da vendere una grande quantità di titoli, non conviene di farlo a contanti per tutta la partita, perchè il corso durante l'operazione reagirebbe con un ribasso; vendendone solo una parte a pronti, e la rimanenza a termine, magari per più liquidazioni successive, per quello che si è detto sul mercato a termine, i corsi non rimangono sensibilmente influenzati. La stessa convenienza si ha nel caso di grandi invertimenti di capitale in un solo titolo. È da notare però che molti titoli vengono contrattati in Borsa solo per contanti.

I prezzi dei contratti a termine sono distinti da quelli a contanti con alcune indicazioni speciali: fine mese (*f. m.*) fine prossimo (*f. p.*) ed analoghe.

Uno stesso titolo può essere quotato per contanti ed a

termine ed a seconda dell'andamento buono o cattivo della Borsa il corso a termine sarà maggiore o minore dell'altro.

I contratti a termine nei quali il venditore deve consegnare i titoli ed il compratore pagare il prezzo convenuto si dicono *contratti fermi*. Teoricamente il venditore ha un guadagno limitato al prezzo del titolo, se, caso quasi assurdo, il titolo alla liquidazione avesse un corso nullo; il compratore può avere un guadagno illimitato, perchè non si può *a priori* stabilire un limite all'aumento del prezzo del titolo. Per le perdite le condizioni sono invertite. Nella realtà delle cose le oscillazioni dei corsi sono molto più ristrette, nel tempo tra due liquidazioni successive, e quindi limitati gli utili e le perdite dei contraenti.

Si sono però immaginati dei contratti nei quali le condizioni dei contraenti non sono pari; uno di essi può rescindere il contratto o richiederne l'esecuzione, o se è sempre obbligato ad eseguirlo può richiedere l'esecuzione nel senso che più gli conviene, o per un maggior importo.

Per avere questo privilegio paga all'altro contraente un *premio*, fissato al momento del contratto. Ma non è a dirsi che l'altro contraente si rassegni ad essere in una posizione inferiore dietro la sola esazione del premio: all'infuori di questo, tra il corso del contratto e quello a termine fermo per lo stesso titolo c'è una differenza *o scarto* (écart) tanto maggiore quanto maggiore è il rischio della parte non privilegiata. Si ha anche maggiore scarto, quando il premio è minore. La parte privilegiata deve dichiarare in qual modo si vale del suo diritto, qualche giorno prima della Liquidazione di Borsa (*Risposta dei premi*).

134. — I principali contratti sono:

Il contratto *per potere o no ritirare*, detto in gergo di Borsa: contratto *di cui*, o *dont*, dal modo di enunciarne le condizioni.

Il compratore paga al venditore un premio per potere ritirare o non, in liquidazione, una certa quantità di titoli ad un corso fissato.

Il premio per i titoli di rendita e qualche altro è compreso nel prezzo stabilito e si dice, per es.: *compero.... R. I. 3 ½ f. m. a* 95,50 *di cui* 0,50, oppure 95,50 *dont* 0,50 (scritto anche 95,50/50); intendendo significare che 0,50 di quel prezzo sono di premio al venditore, affinchè il compratore possa a suo arbitrio dichiarare alla risposta dei premi se pretende l'esecuzione del contratto (levare il premio) pagando in tutto 95,50 per 3,50 di Rendita, oppure no (abbandonare il premio) pagando, se non lo ha già fatto prima, il premio di 0,50.

Il compratore si regolerà secondo il prezzo di liquidazione; così se

i prezzi *sono* — *il compratore*

94,80 se leva il premio paga 95,50 e può rivendere a 94,80, perdendo 0,70, cioè più del premio, perciò . . . . . *abbandona* e perde 0,50

95,— se leva il premio paga 95,50 e può rivendere a 95, perdendo quanto il premio, perciò *leva* » » 0,50

95,20 se leva il premio paga 95,50, può rivendere a 95,20, perdendo 0,30 cioè meno del premio, perciò . . . . . *leva* » » 0,30

95,50 se leva non perde nulla, perciò . . . . *leva* —

95,65 se leva può rivendere a 95,65, perciò . . *leva* e guadagna 0,15

95 è il *prezzo base* o *piede* del contratto, al disotto del quale il C. abbandona.

La posizione del venditore è inversa.

Per altri titoli il premio non è compreso nel prezzo.

135. — Premio *per potere o no consegnare* (*prime pour livrer*).

Qui è il venditore che pagando un premio si riserva la facoltà di consegnare o no i titoli riscuotendo un prezzo fissato.

Per esempio: *si pagano* L. 5 *per potere o no consegnare f. m. una azione al prezzo di L. 210*. S'intende che se il venditore leva il premio riscuote 210 e paga 5, quindi il ricavo netto è 205.

siano

i prezzi — *il venditore*

200 levando il premio riscuote 205 per un titolo che può compiere in borsa al 200, perciò . . . . *leva* e guadagna 5

203 levando guadagna 2 . . . . . *leva* » » 2

205 levando riscuote 205, quindi non ha ne utile nè perdita . . . . . *leva*

208 levando riscuote 205 per il titolo che costa 208, perde 3, *meno del premio*, perciò . . . . . *leva* e perde 3

210 levando riscuote 205 per un titolo che costa 210, perde 5, *quanto il premio*, perciò . . . . . *leva* » » 5

212 levando riscuote la solita somma per un titolo che costa 212, perde 7, *più del premio*, quindi *abbandona* e perde 5

210 è il *prezzo di base* o *piede* del contratto, al disopra del quale il V. abbandona.

136. — Contratto di *doppia opzione* o *stellage*.

Uno dei contraenti — *compratore dello stellage* — paga un premio per avere la facoltà di dichiararsi compratore oppure venditore, alla risposta dei premi, di un titolo ad un prezzo fissato.

È evidente che se si dichiara compratore il titolo gli costerà il prezzo stabilito più il premio, dichiarandosi venditore ha un ricavo uguale al prezzo stabilito diminuito del premio.

Questo contratto equivale dunque a due contratti uguali ai precedenti dei quali uno solo sia obbligatorio, a scelta della parte che paga il premio.

Si acquista uno stellage su azioni Banca Commerciale a L. 930, premio L. 10; comprando si paga 940, vendendo si ricava 920.

siano

i prezzi — *il compratore dello stellage*

910 se compera paga 940 e perde 30, vendendo ricava 920 con guadagno, perciò . . . . . *vende* e guadagna 10

918 comprando perde 22 vendendo guadagna 2, perciò *vende* » 2

920 comprando perde 20, vendendo non ha nè utile nè perdita . . . . . *vende* —

927 comprando perde 13, vendendo perde 7, perciò . . *vende* e perde 7

930 sia comprando che vendendo perde 10, perdita massima . . . . . indifferente perde 10

936 comprando perde 4, vendendo perde 16, perciò . *compera* e perde 4

940 compra senza nè utile nè perdita, se vende perde 20 *compera* —

945 compra con utile di 5, se vendesse perderebbe 25 *compera* e guadagna 5

Si vede che la massima perdita si ha quando il corso di liquidazione è uguale al prezzo del contratto: gli utili incominciano quando la differenza tra prezzo e corso supera il premio.

In un contratto analogo, lo *Spread*, invece di indicare un solo prezzo si indica separatamente quello d'acquisto e quello di vendita; la differenza tra costo e ricavo può essere diversa dal doppio del premio.

137. — Un contratto tipico diverso dai precedenti è il *contratto di aggiunta* o *noch*.

Una delle parti si riserva la facoltà di raddoppiare, triplicare, ecc., l'importanza del contratto a suo piacimento, ed il prezzo pattuito per i titoli *aggiunti* è uguale a quello della

parte *ferma* del contratto. È evidente, come si è già notato parlando dello *scarto*, che la differenza tra il prezzo f. m. *fermo* e quello del contratto a premio sarà tanto maggiore, quanto maggiore è il privilegio di una delle parti, e qui sarà tanto *maggiore* o *minore* il prezzo dell'aggiunta quanti più titoli si potranno aggiungere ai primitivi, a seconda che la facoltà di aggiunta spetta al *compratore* od al *venditore*.

138. — Quando in una Borsa un certo tipo di contratto non è usato, si può trovare un gruppo di altri contratti che nel loro insieme diano a chi li fa una posizione *simile* a quella del contratto che vuole e non può stipulare [1].

Posizione *simile* e non *identica* perchè i contratti componenti dovrebbero essere fatti a certi corsi, con certi premi, e non è sempre possibile farli proprio a queste condizioni.

Talora un operatore vede che il corso del titolo oggetto di un contratto sta variando in senso a lui sfavorevole, ed allora egli compie altri contratti in base alle nuove condizioni del mercato, in modo che alternando opportunamente compere e vendite, ferme ed a premio, gli sia possibile conservare la favorevole posizione iniziale e ridurre la perdita.

139. — Se un operatore ha fatto molti contratti su di un dato titolo può essergli utile il conoscere la sua posizione complessiva prima della liquidazione.

In un primo modo si può per un sufficiente numero di prezzi compresi tra le oscillazioni estreme probabili del corso del titolo, calcolare per ogni contratto l'utile o la perdita, e sommare i risultati corrispondenti. Ma questo lavoro è lungo e fastidioso, poco chiaro e dimostrativo nel risultato.

140. — Un altro modo fu ideato (1870) da H. Lefèvre di Châteaudun [2] e da lui denominata *Polégraphie* (rappresentazione delle vendite), più generalmente noto come: *Rappresentazione grafica dei contratti*.

Su di una retta — *linea di base o dei prezzi* — si segnano dei punti che rappresentino il prezzo di contratto e quelli più probabili di liquidazione, e si conviene di rappresentare gli utili mediante segmenti perpendicolari alla linea di base (ordinate) nel semipiano superiore ed innalzate

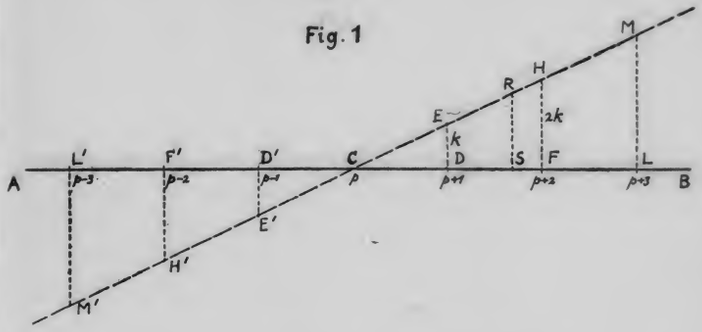
[1] Lazzaro Ricci, *Equivalenze di contratti di Borsa*, Genova.
[2] H. Lefèvre de Châteaudun, *Le commerce*, pag. 209 e segg.

dai *punti-prezzi* di liquidazione corrispondenti, le perdite con segmenti analoghi ma condotti nel semipiano inferiore.

Sia un acquisto f. m. fermo di k titoli al prezzo p.

Su AB (linea dei prezzi) (fig. 1) a partire da C, che scegliamo per rappresentare il prezzo p del contratto, portiamo verso B successivamente un segmento, cui attribuiamo il valore 1, cosicchè i punti D, F, L rappresenteranno i prezzi $p+1$, $p+2$, $p+3$, rispettivamente; e verso A lo stesso segmento in modo che i punti D', F', L' rappresenteranno i prezzi $p-1$, $p-2$, $p-3$.

Fig. 1



Il risultato della speculazione, se x è il prezzo di liquidazione, sarà $k(x-p)$. Per $x=p$ non si ha nè utile nè perdita perciò al punto C nessuna ordinata. Ad $x=p+1$, corrisponde l'*utile* k, perciò al punto D innalzeremo una ordinata DE di lunghezza k (unità di misura un segmento arbitrario). Per $x=p+2$ si ha un utile di $2k$ perciò da F innalzeremo l'ordinata FH di lunghezza $2k$ (misurata collo stesso segmento unitario preso per DE). Seguitando avremo per $x=p+3$ un utile di $3k$ ed a L un'ordinata $LM=3k$ e così via. Per $x=p-1$ avremo una *perdita* di k ed una ordinata di lunghezza k a partire da D' e dalla parte opposta delle precedenti rispetto ad AB e così via. Unisco E, H, M con C, e dico che questi quattro punti sono allineati. Infatti per le convenzioni poste i triangoli CDE, CFH, CLM, rettangoli rispettivamente in D, F, L, hanno i cateti corrispondenti proporzionali, sono simili, e quindi gli angoli $E\hat{C}D$, $H\hat{C}F$, $M\hat{C}L$ uguali.

I punti C, E, H, M sono quindi allineati. Analogamente si dimostra che C, E', H', M', sono allineati; e per l'eguaglianza dei triangoli $D'CE'$, DCE, si conclude che la semiretta $M'C$ è allineata coll'altra CM.

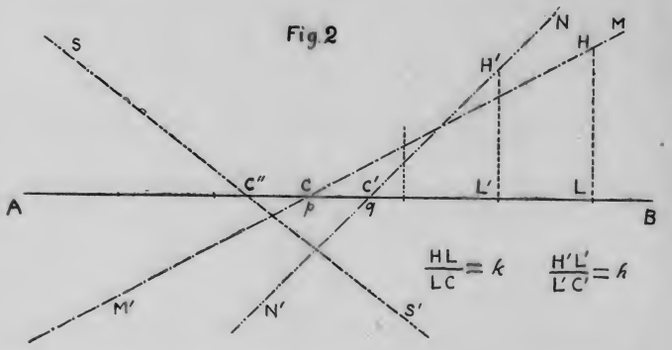
È facile vedere che per ogni punto di AB il segmento di ordinata corrispondente compreso tra AB e la $M'M$ misura il risultato corrispondente a quel punto-prezzo. Preso sulla AB un punto S, l'ordinata SR corrispondente dovrebbe rappresentare l'utile relativo al corso di liquidazione $p+CS$. Infatti per la similitudine dei triangoli CDE, CSR, si

ha $CD : CS = DE : SR$; ma $DE = k$, $CD = (p+1) - p = 1$, perciò $1 : CS = k : SR$ da cui $SR = k\,CS$ cioè all'utile complessivo, essendo CS la differenza tra il prezzo del contratto e quello di borsa.

Non è dunque necessario trovare ad uno ad uno i punti H', E', ... E, H, M... ma basta determinarne uno, e la retta che lo congiunge con C (che rappresenta il prezzo del contratto), tutti li contiene.

Nel caso di un'altra operazione simile ma di h titoli, al prezzo q si avrebbe un'altra retta passante per il punto C' di AB che rappresenta il prezzo q ed inclinata su AB in modo che il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa, misurata a partire da C', sia uguale ad h (fig. 2).

Fig. 2



Il risultato di una vendita essendo dato da $k(p-x)$ la retta rappresentatrice sarà nel semipiano superiore per i punti $x < p$ e nel semipiano inferiore per gli altri $x > p$. Così la SS' nella fig. 2.

Se il contratto è a premio l'utile o la perdita non è sempre proporzionale alla differenza tra il corso di liquidazione ed il prezzo del contratto, ma da un certo punto o resta costante o diminuisce od aumenta con ragione diversa.

Se (fig. 3) C rappresenta il prezzo del *dont* la posizione del compratore è data dalla $NECM$, CD rappresenta il premio d per ogni titolo, DE la perdita complessiva kd e la NE, parallela alla linea dei prezzi, rappresenta la perdita costante del compratore quando abbandona il premio.

La posizione del venditore del *dont* è rappresentata dalla $N'E'CM'$ simmetrica della $NECM$ rispetto ad AB.

La posizione di un venditore che paghi un *premio per potere o no consegnare* è rappresentata dalla fig. 4 colla $NDEM$; C è il punto-prezzo del contratto, $DC = d$ il premio per titolo, CE la perdita complessiva kd. La simmetrica $N'DE'M'$ dà la posizione del compratore.

Il risultato di uno *stellage* sarà per il compratore di esso rappresentato (fig. 5) da KFH; C è il punto-prezzo del contratto, $CD = CE = d$

Fig 3

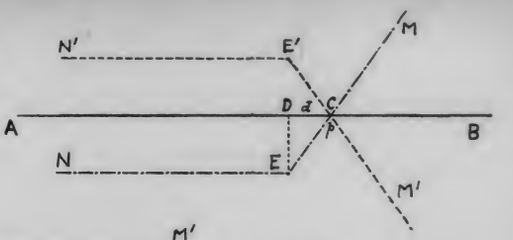


Fig 4

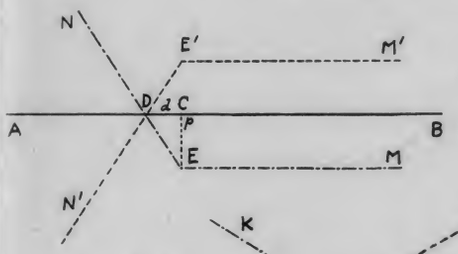


Fig 5

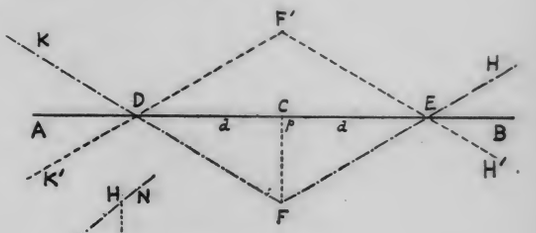


Fig 6

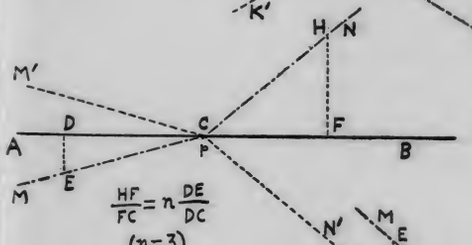
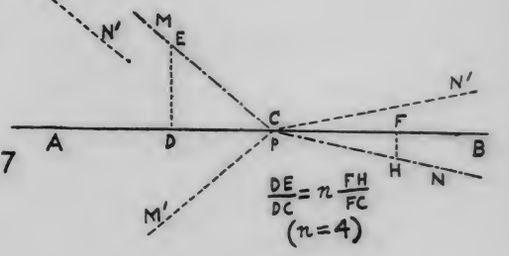


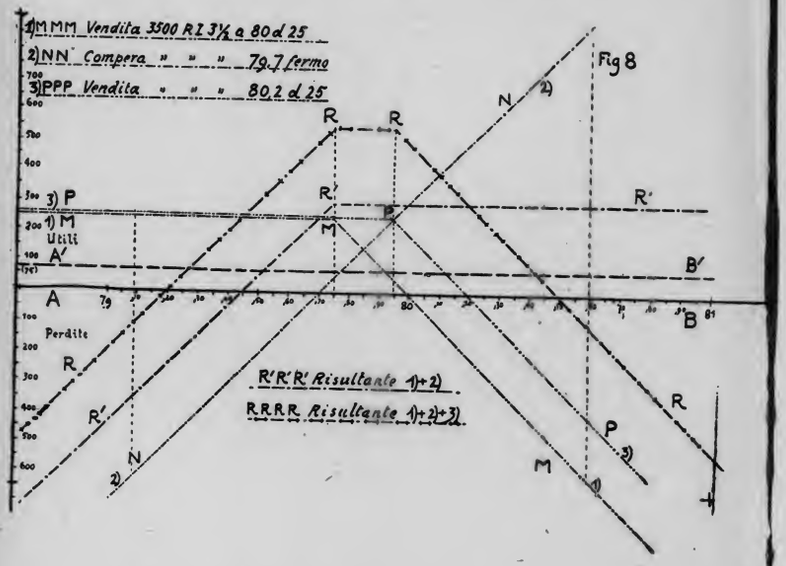
Fig 7



premio unitario $CF = k\,d$ perdita massima. La simmetrica rispetto ad AB, $K'\,F'\,H'$ dà la posizione del venditore.

Un *contratto di aggiunta* in facoltà del compratore, che supponiamo possa pretendere la consegna di $n\,k$ titoli invece di k, si rappresenta (fig. 6) colla $M\,C\,N$, per due punti qualunque della quale, D prima, ed F dopo C si deve avere $\frac{HF}{FC} = n\,\frac{DE}{CD}$. $M'\,C\,N'$ è per il venditore.

Se l'*aggiunta* è in facoltà del venditore la posizione sua è data dalla $M\,C\,N$ nella fig. 7; $M'\,C\,N'$ serve per il suo compratore.



Se per ogni punto della linea dei prezzi facciamo la somma delle ordinate relative a vari contratti da adempirsi alla stessa liquidazione, determiniamo una linea che esprime la situazione complessiva dell'operatore per quel dato titolo e per quella liquidazione. Questa linea, detta *Risultante*, si compone (e ne è facile la dimostrazione) di segmenti di retta; per determinarla basta fare la somma delle ordinate per due corsi estremi e per i punti-prezzo in cui qualcuna delle linee dei contratti è *spezzata*.

Così date le seguenti operazioni

1) Vendita di 3500 R. I. 3 $^1/_2$ a 80 *d* 25
2) Compera » » » » » a 79,70 fermo
3) Vendita » » » » » a 80,20 *d* 25

basta determinare la risultante in due corsi estremi es. 79,10 e 80,60, e nei punti 79,75 e 79,95 in cui sono rispettivamente spezzate le linee del 1) e del 3) contratto.

La risultante cercata è la $R\,R\,R\,R$.

Non è necessario aspettare che si siano compiuti tutti i contratti su d'un dato titolo, per cercare la risultante; man mano che le operazioni avvengono si segnano e si fa subito la somma colla risultante delle operazioni che le hanno precedute. Nel precedente esempio, supposto che i contratti si susseguano nell'ordine in cui sono stati scritti, sommando la 1) e la 2) si avrebbe la risultante parziale $R'\,R'\,R'$, sommando poi questa con la 3) si avrebbe la risultante definitiva $R\,R\,R\,R$.

Volendo tener conto delle spese siccome queste riducono di una somma fissa l'utile, od aumentare la perdita, basta rialzare la linea dei prezzi di altrettanto. Nell'ultimo esempio supposta una spesa complessiva di L. 75 il risultato sarà misurato dall'ordinata della Risultante rispetto alla $A'\,B'$ che dista dalla linea dei prezzi $A\,B$ appunto di L. 75.

141. *La liquidazione dei contratti a termine.*

Venuto il giorno della liquidazione l'operatore che ha, in generale, comperato e venduto più volte lo stesso titolo [1], e non ha eventualmente abbandonato i premi, troverebbe non poche difficoltà a consegnare e ritirare i quantitativi contrattati, riscuotere e pagare tutti gli importi. Si procede ad una compensazione fra acquisti e vendite ed utilmente servono degli ordini — detti *assegni* o *disposizioni*, — sui proprii venditori a favore dei compratori, di consegnare i titoli contro un equivalente importo, in generale in base ad un *prezzo di compenso* (fissato sulla media delle ultime operazioni per contanti) liquidando poi separatamente le differenze.

In Italia l'operatore che ha dei titoli depositati presso un Istituto d'Emissione può disporne con un *Assegno bancario*, vistato dall'Istituto trattario e regolato dalle stesse norme di quello avente per oggetto somme di denaro.

Di utilità veramente grande sono le *Stanze di compensazione* annesse alle principali Borse. Il loro semplicissimo funzionamento si fonda su questa finzione, che la Stanza, *al solo scopo della liquidazione*, si sostituisca verso ogni operatore

[1] L'operatore che non ha titoli da vendere o non vuole risultare compratore in liquidazione, ma solo speculare sulle oscillazioni dei corsi, cerca di coprire una vendita con un acquisto di pari quantitativo; occorrendo, anche presso un'altra Borsa.

(abbonato ad essa) alle sue controparti per i contratti da lui conclusi; cosicchè ogni abbonato paga o riscuote colla Stanza il saldo degli importi in denaro di tutti i suoi contratti cogli altri abbonati, e consegna o ritira, per ogni specie di titoli, la differenza fra i quantitativi di tutti i contratti relativi. Questi *saldi* in denaro ed in titoli sono giustificati da appositi prospetti: uno per il denaro, e tanti altri quante sono le specie dei titoli contrattati.

142. — Quando un operatore non riesce nella sua speculazione, può darsi che egli consideri come temporaneo l'arresto o la inversione nell'andamento dei corsi, e che perciò desideri conservare la sua precedente posizione di fronte al mercato, fino ad una nuova liquidazione.

Egli deve perciò fare un nuovo contratto a termine simile al primo.

Se c è il *prezzo* del primo contratto, per eseguirlo, essendo allo scoperto, fa una operazione a pronti contraria al *prezzo* c_1, e perciò liquida un risultato $(c_1 - c)$, dove la parentesi va presa col segno negativo se l'operazione liquidata è una vendita. Proroga o *riporta* la sua posizione sino alla nuova liquidazione mediante un nuovo contratto a termine al *prezzo* c_2. La differenza $c_2 - c_1$ si dice *prezzo del riporto*. Se c_3 è il *prezzo* alla nuova liquidazione il nuovo risultato sarà $(c_3 - c_2)$ — colla solita convenzione rispetto al segno della parentesi —.

Il risultato complessivo sarà la somma di quelli delle due liquidazioni

$$(c_3 - c_2) + (c_1 - c)$$

e siccome le due operazioni a termine sono della stessa specie e quindi le due parentesi vanno prese collo stesso segno

$$(c_3 - c_2 + c_1 - c)$$
$$(c_3 - [c + (c_2 - c_1)])$$

Il risultato definitivo è dunque la differenza fra il prezzo della nuova liquidazione e quello del primo contratto aumentato del prezzo del riporto, — colla solita convenzione —.

L'operazione a pronti con cui si liquida e l'operazione a termine con cui si proroga possono essere compiute col contraente del primo contratto o con altra persona, di solito con un banchiere, simultaneamente o separatamente.

Quando vengono concluse simultaneamente con la stessa persona, dalla loro riunione sorge un nuovo contratto detto *di Riporto* (1).

Esso è contratto di speculazione per una sola delle parti contraenti, per quella che proroga il precedente contratto e che è allo scoperto.

Il prezzo del riporto può presentare 3 casi: $c_2 - c_1 \gtreqless 0$. Il 1° è la regola e costituisce il *riporto propriamente detto*; il 2°: *riporto alla pari*, ed il 3°: *deporto*, sono eccezionali.

Infatti il contraente che nella operazione di riporto vende i titoli a pronti ha denaro disponibile fino alla nuova liquidazione e lucra un interesse. La somma da restituire sarà perciò, in generale, maggiore di quella avuta. La differenza dipende, fra altro, dal tasso del denaro disponibile (2). Se però la domanda dei titoli a pronti, per rivenderli a termine è molto forte, come si verifica nel caso di forti speculazioni al ribasso non riuscite, la differenza fra i due prezzi può essere minore del tasso del denaro, annullarsi o diventare negativa, *deporto* (3).

Il prezzo c_2 a pronti, non è, in generale, uguale al prezzo di liquidazione di pari data. La differenza o *scarto* (talvolta

(1) *Codice di commercio*, art. 73-75.

(2) Il prezzo del riporto viene spesso ragguagliato ad un tanto per cento all'anno, sul prezzo a pronti, come l'interesse.

(3) I contratti accennati in questo capitolo ed il loro meccanismo di liquidazione e di proroga non sono speciali al mercato dei valori mobiliari, ma possono aversi su quello di qualunque cosa che abbia un commercio in grande bene organizzato, come appunto è il caso dei valori mobiliari, per alcune merci, per i cambi, i noli. La diversa estensione che l'organizzazione accennata vi prende, dipende dalla natura della cosa, trasportabilità, costanza di tipi, dalle condizioni della sua produzione (od offerta) e consumo (o domanda), cioè dalla possibilità di avere un prezzo corrente.

Per alcune materie prime, grano, lana, cotone ed altre, si hanno in alcuni paesi borse speciali simili a quelle dei titoli, e per la liquidazione dei contratti a termine apposite *Casse di liquidazione*.

ragguagliata ad un tanto $^0/_0$ nel prezzo di compenso) è varia secondo i titoli più o meno sicuri, la solvibilità del cliente, ed anche l'interesse che può avere la parte che non è allo scoperto di influire in un dato senso sulla speculazione sul titolo.

Esempio. Si acquista f. m. una azione a 930. In liquidazione si è in perdita (perchè per es. il prezzo è 910). Si riporta fine prossimo vendendo a pronti a 880, ricomprando f. m. a 890 (fig. 9).

Risultato del 1° contratto 880-930, *perdita* — 50.

Prezzi alla nuova liq.	L'operatore che *compera a 890*		*Risult. defin.*
875	perde	— 15	— 65
910	guadagna	+ 20	— 30
930	guadagna	+ 40	— 10
940 = 930 + 10 (prezzo del riporto)	guadagna	+ 50	pareggio
960	guadagna	+ 70	+ 20

Esempio. Si è venduta della rendita a 93 f. m. In liquidazione si è in perdita (per es. il prezzo è 94). *Si compera a 94 a pronti e si rivende f. m. a 93.85* (93,85 — 94 = — 0,15 deporto) (fig. 10).

Si perde nella prima liquidazione 1, per compensare occorre guadagnare almeno altrettanto alla nuova liquidazione, e siccome si vende a 93,85 il prezzo f. m. deve essere 92,85 o minore.

In quanto precede si è parlato di *prezzi* e non di *corsi* in generale. Se i corsi sono *secchi*, per avere i prezzi bisogna aggiungere ad essi i frutti i dal *comune giorno di godimento*. Distinguendo i frutti cogli stessi indici dei corsi relativi, l'espressione del risultato diventa

$$((C_3 + i_3) - [(C + i) + ((C_2 + i_2) - (C_1 + i_1))])$$

Ma i corsi C e C_1 si riferiscono alla stessa data (1ª liquidazione) ed i corsi C_2 e C_3 pure alla stessa data (2ª liquidazione), perciò $i = i_1$ e $i_2 = i_3$. L'espressione del risultato si semplifica e diventa

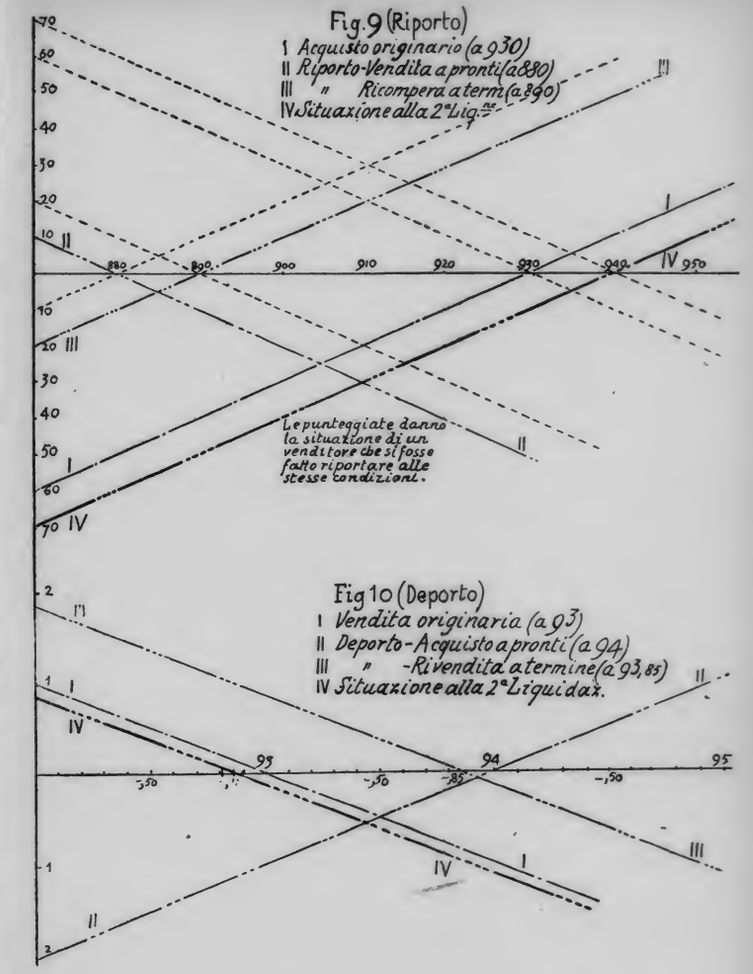
$$(C_3 - [C + (C_2 - C_1)])$$

identica a quella già trovata. Il *risultato dell'operatore dipende dunque dal prezzo del riporto e dai corsi, qualunque sia il modo di quotazione.*

Il prezzo del riporto *effettivo*, cioè *differenza dei prezzi*, è però diverso da quello *apparente*, cioè *differenza di corsi*. Infatti

$$(C_2 + i_2) - (C_1 + i_1) = (C_2 - C_1) + (i_2 - i_1)$$

dunque è uguale al *riporto apparente aumentato del frutto maturato nel tempo fra le due liquidazioni*. Così se un titolo, quotato al secco, di L. 100 nominali fruttante il 6 $^0/_0$, è riportato a 80 a pronti, contro 80,25 f. m. il riporto apparente è 0,25, per trovare quello effettivo bisogna aggiungere l'interesse maturato in un mese cioè 0,50, in tutto 0,75.



Ciò è da tenere presente quando si confrontino i tassi di riporto su piazze differenti. Dal confronto si determina la piazza su cui il denaro è a miglior mercato e quella dove è più caro: si prendono titoli a riporto sulla prima e si danno a riporto sulla seconda, lucrando la differenza (*arbitraggi sui riporti*).

143. — Anche senza valersi di mezzi illeciti, la speculazione quando tende a modificare il corso di un titolo, senza che le circostanze lo giustifichino, è dannosa. Non permette più un mercato normale dei valori, coll'instabilità dei corsi danneggia il credito, toglie sicurezza alle fortune dei privati investite in titoli, ed infine nei periodi di reazione che sogliono seguire agli eccessivi e prolungati periodi di rialzo o di ribasso artificioso, rovina molte ditte operanti in Borsa e coloro che a queste hanno affidato proprii capitali.

Alcune volte i governi hanno preso provvedimenti per frenare la speculazione. Osservando che spesso un forte ribasso è conseguenza di rialzo eccessivo e che un esagerato ribasso provoca un rialzo (ripresa) dei corsi, parrebbe che i provvedimenti presi dovessero limitare le esagerazioni dei corsi nell'uno e nell'altro senso. Ma diverso è l'effetto che la speculazione al rialzo e quella al ribasso producono. La prima, o per esser precisi, la *tendenza* al rialzo promette utili sugli investimenti di capitale e quindi provoca gli investimenti, eccita il credito e gli scambi e promuove, se non la cosa, almeno i segni della prosperità. Il ribasso invece disanima dagli investimenti, provoca la sfiducia, l'arresto dell'attività commerciale. Per tali ragioni i provvedimenti presi tendono a limitare la rapidità del *ribasso* e stabiliscono a *favore del compratore* in borsa il diritto di richiedere *la esecuzione anticipata del contratto — diritto di sconto.*

Esiste da tempo presso la Borsa di Parigi e fu introdotto nelle Borse italiane nel 1907 (decreti 13-14 novembre).

144. — Un titolo contrattato e quotato in una borsa, il cui listino permette di conoscere il prezzo dei contratti di cui è stato oggetto, è meglio giudicato dai possessori; la Borsa inoltre ne è il mercato e vi sono facili gli investimenti e le realizzazioni dei capitali; il titolo è perciò in generale preferito dai capitalisti ad altri che non vi sono quotati.

Non tutti i titoli sono quotati in Borsa.

L'ammissione di alcuni titoli nazionali alla quotazione in Borsa avviene di pieno diritto, così i titoli di Stato o garantiti da esso, le Cartelle Fondiarie. Quelli delle Società commerciali ed Enti morali esteri e nazionali, vogliono l'adempimento di alcune formalità, fissate dal governo, che hanno lo scopo di dare grande pubblicità ed ampiezza di notizie intorno al titolo.

Intorno a queste ammissioni, alla formazione del listino, ai mediatori, ecc., dispone particolarmente il Regolamento 4 agosto 1913 alla legge 30 marzo 1913 sull'Ordinamento delle Borse.

Non è indifferente pei governi permettere la quotazione di titoli esteri nelle proprie Borse, quando essi vogliano per qualche ragione far convergere i capitali disponibili su titoli nazionali.

L'esclusione dei titoli di un dato Stato è una vera rappresaglia finanziaria per ragioni politiche. L'inconveniente della esclusione di certi titoli dalle Borse nazionali è molto diminuito dalla grande facilità di conoscere i corsi delle piazze estere ove vi son quotati, dalla rapidità delle comunicazioni e dall'uso di lasciare titoli in deposito presso ditte bancarie anche estere. Il governo italiano ha creduto necessario di attuare alcune misure per frenare l'esodo dei capitali italiani verso titoli stranieri e nel 1909 ha stabilito, ed in seguito aumentato, alcune gravose tasse speciali sui titoli esteri negoziati in Italia.

145. *Tasse ed imposte.* — I titoli nazionali sono *bollati*, sono soggetti alla *tassa di negoziazione*, ed i loro frutti alla *Imposta di Ricchezza Mobile*, pagate sempre dal debitore e trattenute sul frutto se questo non è pattuito *netto*. Vi possono poi essere tasse speciali sui frutti, qualche volta più forti sui titoli al portatore.

I titoli esteri sono pure bollati (eccettuati i Buoni del Tesoro a meno di 5 anni). Sulle contrattazioni di borsa grava una imposta che si riscuote in Italia colla vendita di fogli bollati (*fissati*) sui quali devono venire stipulati i contratti. Se i contratti avvengono direttamente tra le parti i foglietti constano di due parti simili, una destinata al compratore e l'altra al venditore; se si fanno coll'intervento dell'Agente di cambio una delle parti dei foglietti rimane all'agente, la figlia si dà al contraente.

Per i contratti conclusi:

	direttamente fra privati:				*a mezzo di agenti di cambio:*
Contratti	fino a L. 20000	50000	200000	oltre	
a contanti (1)	0,80	1,20	—	1,60	la tassa è ridotta a metà
a termine	—	1,60	2,40	4,80	
Riporti (2)	—	2,40	4,—	6,—	

(1) Per titoli di Stato e garantiti dallo Stato la tassa è ridotta a $^1/_2$.
(2) Conclusi tra agenti di cambio L. 0,50 fissa.

CAPITOLO TREDICESIMO.

SCADENZA COMUNE

146. — Si è visto che in luogo dei pagamenti (positivi e negativi) $C_1\ C_2 \dots C_n$ espressi nella stessa moneta, fatti dopo i tempi $t_1\ t_2 \dots t_n$ a partire da un'*Epoca* comune, si può fare un pagamento di importo pari alla somma algebrica di $C_1\ C_2 \dots C_n$ ad una *scadenza media*, distante il tempo T dalla solita Epoca. Questo tempo, coll'*interesse semplice*, è indipendente dal tasso ed è dato dalla espressione

$$[1] \qquad T = \frac{C_1 t_1 + C_2 t_2 + \dots + C_n t_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n}$$

Se il giorno in cui si fa il pagamento $C_1 + C_2 + \dots C_n$ viene anticipato o ritardato in confronto alla scadenza media, si dovrà pagare la somma scontata od il montante ad *un determinato tasso d'interesse* per la differenza dei tempi. Il pagamento venga fatto il tempo t *dopo l'Epoca*, l'importo sarà

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n + (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(t - T)\, r$$

e sostituendo a T il suo valore dato dalla [1] si avrà successivamente

$$C_1 + \dots + C_n + (C_1 + \dots C_n)\left(t - \frac{C_1 t_1 + \dots + C_n t_n}{C_1 + \dots + C_n}\right) r$$

$$C_1 + \dots + C_n + [(C_1 + \dots + C_n)t - (C_1 t_1 + \dots + C_n t_n)]\, r$$

$$[\alpha] \qquad C_1 + \dots + C_n + [C_1 (t - t_1)\, r + \dots + C_n (t - t_n)\, r].$$

I termini nella parentesi [ ] rappresentano a seconda del segno delle differenze $t - t_x$ gli interessi o gli sconti sui pagamenti singoli per i tempi che passano tra le loro scadenze e la *scadenza comune*, e saranno positivi o negativi secondo il prodotto del segno di quelle differenze per quello dei capitali relativi.

Se si suppone l'*interesse composto* il tempo T dipende dal tasso ed è dato dalla relazione

$$(C_1 + \dots + C_n)(1 + r)^{-T} = C_1 (1 + r)^{-t_1} + \dots + C_n (1 + r)^{-t_n}$$

Se il pagamento viene fatto il tempo t dopo l'Epoca, l'importo sarà il montante od il valore attuale di $(C_1 + C_2 + \dots C_n)$ per il tempo $t - T$, e si avrà identicamente

$$(C_1 + \dots + C_n) = C_1 (1 + r)^{T - t_1} + \dots + C_n (1 + r)^{T - t_n}$$

$$(C_1 + \dots + C_n)(1 + r)^{t - T} = C_1 (1 + r)^{t - t_1} + \dots + C_n (1 + r)^{t - t_n} =$$

$$[\alpha_1] \qquad = C_1 + \dots + C_n + \{C_1 [(1 + r)^{t - t_1} - 1] + \dots + C_n [(1 + r)^{t - t_n} - 1]\}$$

I termini nella parentesi { } hanno lo stesso significato di quelli analoghi coll'interesse semplice. Ci occupiamo solo dei calcoli fatti coll'interesse semplice.

147. — Si divida il tempo t in due parti qualunque $t' + t'' = t$, t' rappresenti il tempo tra l'epoca ed un giorno qualunque che, per distinguerlo, chiameremo *scadenza comune fittizia*, e t'' il tempo tra questa e quella vera.

L'espressione ultima del saldo diventa

$$C_1 + \dots + C_n + [C_1 (t' + t'' - t_1)\, r + \dots + C_n (t' + t'' - t_n)\, r]$$

$$[\beta] \quad C_1 + \dots + C_n + [C_1 (t' - t_1) r + \dots + C_n (t' - t_n) r] + (C_1 + \dots + C_n)\, t'' r.$$

L'espressione tra parentesi [ ] rappresenta gli interessi da calcolare sui singoli capitali come se la scadenza comune fittizia

fosse quella vera, ed il termine $(C_1 + \ldots + C_n)\, t'' r$ l'interesse da calcolare sul saldo capitali per il tempo tra la scadenza comune fittizia e quella vera per *correggere* il calcolo precedente. Il segno di questo interesse di correzione dipende da quello di t'' e da quello del saldo capitale. Se la scadenza comune *vera* viene dopo quella *fittizia*, $t'' > 0$ e l'interesse di correzione si aggiunge al saldo capitali perchè ne ha il segno; se invece $t'' < 0$ quell'interesse si deve sottrarre. Se la scadenza fittizia viene a coincidere con quella vera, $t'' = 0$ e $t' = t$, ed il termine di correzione è nullo.

Se invece $t' = 0$ e quindi $t = t''$, cioè quando si prende per scadenza fittizia l'*epoca*, l'espressione del saldo diventa

$$[\gamma] \quad C_1 + \ldots + C_n - [C_1 t_1 r + \ldots + C_n t_n r] + (C_1 + \ldots + C_n)\, t\, r.$$

Così gli interessi che si calcolano sui singoli capitali tra l'epoca e le loro scadenze sono tutti di segno contrario ai loro capitali, e l'interesse di correzione per il tempo tra l'*epoca* e la scadenza comune ha sempre il segno del saldo capitali.

Si ha pure identicamente

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n + \{ C_1 (t - t_1) r + C_2 (t - t_2) r + C_3 (t - t_3) r + \ldots + C_n (t - t_n) r \} =$$

$$[\delta] \quad = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n + \{ C_1 (t_2 - t_1) r + (C_1 + C_2)(t_3 - t_2) r + (C_1 + C_2 + C_3)(t_4 - t_3) r + \ldots + (C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n)(t - t_n) r \}$$

qualunque sia l'ordine con cui si sono distribuiti gli indici 1, 2...n. Questa identità significa che, disposti i pagamenti in un *ordine qualunque*, si può calcolare l'interesse complessivo, calcolando l'interesse sul 1° per il tempo tra la scadenza sua e quella del 2°, aggiungere l'interesse sulla somma algebrica dei primi 2 per il tempo tra la scadenza del 2° e quella del 3°, ecc., più l'interesse sulla somma algebrica di tutti i capitali per il tempo tra la scadenza dell'ultimo e la scadenza comune. Per ciò che riguarda l'ordine dei capitali, in particolare possiamo disporli in ordine crescente di scadenza, cosicchè tutti

i $(t_x - t_{x-1})$ sono positivi e può essere negativo solo $(t - t_n)$; oppure dividerli in due gruppi, quelli che scadono prima e quelli dopo la scadenza comune, e separatamente riferirli a questa; oppure disporli coll'ordine di data delle transazioni che hanno dato origine a quegli obblighi di pagamento.

Potendo raccogliere a fattore comune r in tutti i termini esprimenti interessi nelle espressioni letterali precedenti, si vede che si possono dapprima calcolare i prodotti dei capitali per i tempi d'impiego e poi moltiplicare la somma di questi prodotti per r. I tempi sono generalmente espressi in giorni ed il tasso è annuale cosicchè si dovrà moltiplicare la somma algebrica dei numeri per $\frac{r}{360}$, o, permettendolo i dati, dividerla per il divisore fisso corrispondente al tasso.

148. — Il calcolo può essere disposto in più modi, ma sempre si tengono distinti i capitali dagli interessi e si aggiunge alla somma algebrica dei capitali (si *porta a capitale*, si *capitalizza*) la somma algebrica degli interessi.

Possiamo disporre i capitali in un certo ordine, per es., man mano che si vengono a conoscere, e fare successivamente la loro somma algebrica e quella dei loro interessi.

(I)

Segni	CAPITALI	Tempi	Segni	INTERESSI
+	C_1	$t - t_1$	+	$C_1 (t - t_1) r$
+	C_2	$t - t_2$	+	$C_2 (t - t_2) r$
+	$C_1 + C_2$		+	$C_1 (\ ) r + C_2 (\ ) r$

Oppure fare solo quella dei capitali e tenere separati gli interessi secondo il loro segno.

(II)

Segni	CAPITALI	Tempi	INTERESSI	
			+	−

Adottando questa forma si fa la differenza fra i totali delle due colonne d'interessi e mentre si capitalizza si scrive anche nella colonna dove il totale è minore, *per bilancio* (*bil. interessi*). Facendo poi la somma algebrica nella colonna capitali si fanno pure i totali, che risultano tra loro uguali, in quelle degli interessi.

Per fare il calcolo del saldo come nell'ultima formula indicata, bisogna disporlo in una di queste due forme.

Possiamo tener separati i capitali secondo il loro segno ma mettere gli interessi in una sola colonna.

(III)

CAPITALI		Tempi	Segni	INTERESSI
+	−			

La somma algebrica degli interessi si capitalizza aggiungendola ai capitali che sono del suo stesso segno, poi si fa la differenza fra i totali dei capitali di segno opposto e questa differenza, cioè il *saldo*, si scrive *per bilancio* (*bil. capitali*) nella colonna di essi dove il totale è minore. Così facendo i totali delle due colonne essi risultano uguali (*bilanciano*).

Possiamo infine tener separati secondo il loro segno capitali ed interessi. Se la forma adottata è la seguente le scritture sono facilissime.

(IV)

CAPITALI		Tempi	INTERESSI	
+	−		+	−

La differenza fra i totali delle due colonne d'interessi mentre si capitalizza aggiungendola ai capitali dello stesso segno, si scrive per bilancio, come per la forma (II), e si fa per il saldo capitali come nella forma (III). Facendo poi i totali nelle colonne capitali ed interessi, esse due a due bilanciano.

Più frequentemente si fanno delle scritture due *sezioni*, riunendo in una parte del foglio tutte quelle relative ai capitali (+), e dall'altra parte quelle relative ai capitali (—). In ciascuna sezione possono figurare interessi dello stesso o di segno contrario a quello dei capitali relativi: *interessi contrari*.

Si può allora in ciascuna sezione fare una colonna apposita per questi interessi, avendo così questo prospetto.

+ (V) −

CAPITALI +	Tempi	INTERESSI		CAPITALI −	Tempi	INTERESSI	
		+	−			−	+

Alla fine del calcolo i totali degli interessi contrari si trascrivono nella sezione opposta tra gli interessi dello stesso segno. Poi, non tenendo più alcun conto dell'ultima colonna di ogni prospetto, si procede *al bilancio* e *capitalizzazione* degli interessi restanti ed al calcolo del *saldo e bilancio dei capitali*. Volendo che, facendo i totali in tutte le colonne, anche l'ultima di una sezione si bilanci con quella corrispondente dell'altra, al momento in cui gli interessi contrari vengono trasportati nella sezione opposta si devono trascrivere nell'ultima colonna di questa sezione.

Si possono pure scrivere gli interessi per ogni sezione in una sola colonna e distinguere quelli contrari mediante il segno, o, praticamente, col colore diverso dell'inchiostro (per esempio *rosso*).

\+ (VI) —

CAPITALI +	Tempi	INTERESSI ±	CAPITALI −	Tempi	INTERESSI ±

Con questa forma si può procedere come per quella precedente tenendo distinti col colore diverso i totali degli interessi diversi di ogni sezione. Si può anche fare la somma algebrica degli interessi scritti nella stessa colonna, salvo a trasportare nella sezione opposta col colore cambiato quella somma algebrica che risultasse *rossa*.

Ma si fa più frequentemente la differenza fra gli interessi contrari delle due sezioni e si *aggiunge*, col nome di *bilancio interessi rossi*, agli interessi dello stesso segno della sezione dove quelli sono minori.

Poi si fanno le altre operazioni di saldo, trascurando gli interessi contrari.

Se si fa il calcolo coi *numeri* valgono le precedenti osservazioni, basta sostituire la parola numero a quella d'interesse, e sulla somma algebrica dei numeri (bilancio numeri, quando si scrive per bilancio), calcolare l'interesse da capitalizzare al tasso convenuto.

149. — Nella pratica la scadenza comune si dice *data di chiusura o di appuramento o liquidazione del conto.* Ai prospetti già accennati per il calcolo, si aggiungono in appositi spazi (colonne) le scritture delle date e descrizioni delle cause dei debiti e crediti singoli ed il giorno del pagamento di ciascuno di essi — *scadenza o valuta*. Il prospetto si intitola alla persona verso cui si hanno i debiti e crediti, e capitali ed interessi si distinguono colle voci: *dare* se sono debiti, *avere* se sono crediti della persona *titolare* del conto.

150. — Le formule [α]....[γ] danno origine ad altrettanti cosidetti *metodi di chiusura del conto.*

Colla formula [α] si ha il *metodo diretto*, colla [β] il *metodo diretto a chiusura presunta*, colla [δ] quello *indiretto od a epoca*, colla [γ] i diversi *metodi scalari.*

La regola pratica del *metodo diretto* non ha bisogno di essere enunciata essendosi sempre riferiti alla formula [α] nello spiegare l'uso dei vari prospetti (vedi gli esempi I, II). Con esso gli interessi contrari sono realmente sconti.

Questo metodo, nonostante la sua semplicità, ha degli inconvenienti pratici notevoli dove si debbono chiudere nello stesso giorno molti conti. Per preparare il lavoro e render più sollecita la chiusura bisognerebbe almeno conoscere con certezza la data di chiusura: infatti solo in questo caso si può calcolare per ogni capitale, quando si scrive nel conto, il relativo interesse. Furono per ciò pensati gli altri metodi.

151. — Regola del conto a *chiusura presunta.* Il conto viene tenuto e gli interessi calcolati come se la chiusura presunta dovesse essere quella effettiva, ed anzi si prende per chiusura fittizia quella che sarebbe la vera se nulla di imprevisto si verificasse durante la tenuta del conto. Così se la data presunta e vera coincidono si liquida il conto come nel metodo diretto. Se la chiusura vera viene prima di quella presunta si calcola l'*interesse di correzione* sul bilancio dei capitali (*primo bilancio o provvisorio, dei capitali*) per il tempo (*negativo*) tra la chiusura fittizia e quella vera, che è di segno opposto al saldo capitali, cioè uno sconto. Si scrive perciò senz'altro, se il conto ha la forma IV o successive, nella sezione di segno opposto al saldo capitali, cioè dove i capitali sono minori, nella colonna interessi.

Se la chiusura effettiva viene dopo la presunta, si calcola l'interesse di correzione analogo, ma il tempo tra la chiusura presunta e quella effettiva risulta positivo e quell'interesse di correzione ha lo stesso segno del saldo capitali. Perciò se il conto ha le forme IV a VI si scrive nella sezione dello stesso segno del saldo capitali cioè dove i capitali sono maggiori, tra gli interessi.

Fatta questa correzione, si chiude il conto come nel metodo diretto.

La chiusura effettiva ben raramente si farà dopo quella presunta perchè, scelta questa nel modo anzidetto, quando il conto non si chiude prima, si chiude alla data presunta. Occorrendo, il saldo definitivo colla scadenza di questa chiusura diventerà un elemento di un conto successivo.

Alla regola del metodo a chiusura presunta si può giungere *per via di discorso,* così: Se il conto si deve chiudere prima del giorno fino al quale si erano calcolati interessi e sconti vuol dire che il saldo sarà pagato o riscosso un certo tempo prima della scadenza che esso deve avere e perciò va scontato per questo tempo. Se si adotta una delle forme V o VI il saldo va scritto per bilancio dalla parte dove i capitali sono minori e scrivendovi prima quello sconto di correzione il saldo capitali verrà di altrettanto diminuito.

Se invece la chiusura effettiva segue la presunta il saldo capitali verrà pagato o riscosso dopo il giorno a cui esso era stato riferito e perciò va aumentato dell'interesse per il tempo di proroga. Se si adotta la V o la VI forma il saldo capitali va scritto per bilancio dalla parte dove essi son minori, aggiungendo l'interesse di correzione dalla parte dove i capitali sono maggiori quel saldo verrà appunto di altrettanto aumentato.

152. — Il *metodo indiretto* ha la seguente regola:

Si fissa una *chiusura presunta anteriore a tutte le scadenze* (*Epoca*), così tutti i capitali danno origine ad interessi di segno a loro contrario — sconti. *Colle forme* (I) *a* (IV) *basta dare agli interessi segno o colonna contraria ai capitali relativi. Poi si calcola l'interesse di correzione sul bilancio provvisorio dei capitali per il tempo* (*positivo*) *tra l'Epoca e la chiusura* che certamente viene dopo di quella, interesse di correzione che risulta dello stesso segno del saldo capitali o dei capitali maggiori, *e si scrive come per il secondo caso del metodo precedente.*

Similmente si chiude il conto.

Se si adopera la V o la VI forma *si usa nella pratica di non scrivere gli sconti in rosso* perchè mancherebbe (eccettuato alla chiusura) ogni bisogno di distinguerli e perciò si devono avere le seguenti avvertenze. L'*interesse di correzione*, avendo il segno dei capitali maggiori, potrebbe scriversi nella loro sezione, distinguendolo dagli sconti, in pratica *si aggiunge,* per evitare questa distinzione, *agli sconti dei capitali minori.* Si potrebbe poi chiudere il conto colla solita regola del metodo diretto, ma si può semplificare osservando che, trattando il bilancio degli sconti similmente a quello degli interessi, si dovrebbe sommarlo algebricamente (cioè sottrarlo) coi capitali della sezione dove gli sconti sono maggiori, lo si porta quindi nella sezione opposta e si capitalizza *aggiungendolo ai capitali nella sezione dove gli sconti sono minori* (dove lo si scrive pure per bilancio).

153. *Metodo scalare.* — Disposti i capitali in un certo ordine si calcola sul primo, per il tempo tra la sua e la scadenza del secondo capitale, l'interesse o lo sconto a seconda del segno di quel tempo (positivo se la scadenza del 2° segue quella del 1° capitolo, negativo nel caso contrario). Fatta la somma algebrica dei primi due capitali su di questa si calcola l'interesse o lo sconto per il tempo tra la scadenza del 2° e quella del 3° capitolo. Poi si fa la somma algebrica dei primi tre e si continua; sull'ultima somma algebrica l'interesse o sconto si calcola per il tempo tra l'ultima scadenza e la chiusura. Siccome si usano le forme I o II non si hanno scritture particolari per gli sconti.

La regola è di facile comprensione, osservando che essa si riduce, mediante il calcolo degli interessi e degli sconti, a far sì che le successive somme algebriche dei capitali abbiano sempre la scadenza dell'ultimo loro componente.

Se i capitali che scadono prima della chiusura si dispongono in ordine crescente di scadenza e quelli che scadono dopo vengono tenuti in ordine decrescente di scadenza, il conto si divide in due: nel primo non si hanno che interessi e nel secondo sconti. In qualche caso speciale questo è l'unico procedimento di liquidazione applicabile.

Per avere i capitali in questo ordine si dispongono dapprima man mano che si vengono a conoscere, in un prospetto come il seguente, secondo il giorno di scadenza.

Giorni	Gennaio		Febbraio		Marzo		Novembre		Dicembre	
	D	A	D	A	D	A	D	A	D	A
1										
2										
3										
4										
5										
28										
29										
30										
31										

154. *Casi speciali. Conto per depositi presso Banche.* — Nei depositi fruttiferi di denaro presso le banche, restituibile a richiesta del depositante, si hanno delle clausole speciali riguardanti il calcolo degli interessi. Esse tendono a ridurre: 1° od il tempo per cui calcolare l'interesse; 2° oppure il capitale su cui questo interesse va calcolato.

Le clausole del primo tipo ritardano la valuta delle somme depositate ed anticipano quella delle somme ritirate. Il ritardo può essere uguale per tutte le somme, o, più razionalmente, crescente coll'importo delle operazioni.

Un caso speciale di queste clausole si ha quando si stabilisce di misurare il tempo con periodi maggiori del giorno, per es. settimane o quindicine, e trascurare le frazioni di periodo se l'interesse è a favore del cliente o arrotondarle in un periodo intero se l'interesse è a suo carico.

La forma del conto non ha nulla di speciale.

Colle clausole del secondo tipo si stabilisce di determinare ogni mese o quindicina od altro periodo fisso, il minimo importo che in qualche momento ha avuto il credito del depositante durante questo periodo, e calcolare su di esso l'interesse per il periodo trascorso. L'interesse complessivo del conto è la somma degli interessi calcolati per ogni periodo. Il conto si

dice che è ad interesse sui *minimi bilanci periodici*. La forma deve essere scalare, almeno per i capitali, e basta una sola colonna per gli interessi. Se si applica questo modo di calcolare gli interessi a conti in cui il cliente del banchiere può diventare debitore si può stabilire che l'interesse a debito del cliente si calcoli sul massimo importo del suo debito per ogni periodo: il conto si dice allora *ad interessi* sui *minimi e massimi bilanci periodici*.

Il risultato cui tendono queste convenzioni è quello di lasciare al banchiere per il più lungo tempo possibile la disponibilità delle somme depositate. Le clausole del secondo tipo e l'ultimo caso di quelle del primo fanno sì che il cliente abbia tornaconto ad eseguire i depositi alla fine dei periodi ed i prelevamenti al principio. Se il cliente fa le sue operazioni in questi momenti, gli interessi del conto risultano uguali colle due specie di clausole; se invece eseguisce le operazioni in altri momenti le condizioni sue risultano peggiori colla convenzione di misurare il tempo con unità maggiori del giorno ed indivisibili. Con qualunque convenzione, la condizione del cliente peggiora col crescere della lunghezza del periodo di tempo stabilito.

Si deve notare che quanto precede non è particolare ai conti derivanti da deposito di denaro. Quando le operazioni hanno valute diverse dalle date le clausole del secondo tipo vogliono il conto scalare ed i capitali ordinati per scadenze crescenti, ma per le somme scadenti dopo la chiusura si devono fare patti speciali se la chiusura del conto è definitiva; se il saldo del conto si riporta a nuovo è più giusto considerare come suoi componenti le sole somme che scadono prima della chiusura, le altre si riportano singolarmente nel conto nuovo. Mancano però le pratiche applicazioni.

155. *Conto a tasso d'interesse variabile.* — Quando il tasso convenuto per la liquidazione del conto viene mutato prima della chiusura, si procede a tante chiusure parziali quanti sono i cambiamenti avvenuti. Si hanno così tanti conti successivi quanti sono i tassi, ognuno riguarda i capitali scaduti mentre è in vigore il tasso a cui si deve per esso liquidare l'interesse, più il saldo capitali del conto precedente, salvo nell'ultimo conto

dove la chiusura definitiva comprende tutti i capitali restanti. Gli interessi calcolati in ogni conto parziale vengono capitalizzati soltanto nella loro somma algebrica alla chiusura definitiva del conto.

Qualunque forma e regola è applicabile: solo per il conto scalare bisogna ordinare i capitali in ordine crescente di scadenza e sul saldo dei capitali che esiste al momento in cui il tasso muta, l'interesse va calcolato al tasso precedente per il tempo tra la scadenza dell'ultimo capitale in quella somma compreso e la data del cambiamento e poi al tasso nuovo per il tempo tra questo cambiamento e la scadenza successiva.

Se il conto è tenuto ad interessi non è necessario mettere in evidenza il bilancio interessi di ogni conto parziale, le colonne relative si bilanciano solo alla chiusura definitiva. Se il conto è a numeri ogni chiusura parziale vuole il bilancio delle colonne numeri, e l'interesse relativo viene annotato nello spazio delle descrizioni. Alla chiusura definitiva si capitalizza la somma algebrica degli interessi di tutte le chiusure parziali.

156. *Conto ad interesse non reciproco.* — Quando due sono i tassi d'interesse da usare contemporaneamente per la liquidazione del conto, si possono presentare quattro casi:

1° gli interessi si calcolano *sui singoli capitali* ad un tasso diverso secondo *il segno dei capitali*;

2° gli interessi si calcolano *sui capitali* a tasso diverso secondo *il segno degli interessi*;

3° gli interessi si calcolano *sui successivi saldi di capitale* per il tempo di durata di ciascuno a tasso diverso secondo *il segno dei saldi*;

4° gli interessi si calcolano *sui successivi saldi di capitali*, a tasso diverso secondo *il segno degli interessi*.

I risultati sono naturalmente diversi per i vari casi, le differenze sono più forti tra i primi e gli ultimi due, e tanto maggiori quanto più lungo è il tempo tra due successive chiusure del conto. Infatti, dati due capitali di pari somma e scadenza e di segno opposto; negli ultimi due casi le somme si compensano e non producono alcun interesse complessivo, nei primi invece fruttando separatamente per lo stesso tempo a

tasso diverso, danno un interesse complessivo pari a quello calcolato su una di esse per quel dato tempo ad un tasso uguale alla differenza fra quelli dati e del segno dell'interesse singoli a cui spetterebbe il tasso maggiore.

Le condizioni del conto nei primi due casi possono diventare particolarmente gravose per una delle parti. Se un banchiere apre un conto ad un commerciante addebitandolo al 6 % per le anticipazioni concesse ed accreditandolo del 3 % sulle restituzioni, il commerciante viene a pagare un interesse sulle anticipazioni avute a tasso molto superiore al 6 %. Questo tasso reale si può facilmente calcolare. Per non pagare più del 6 % non si dovrebbe fare alcuna restituzione delle somme avute se non alla chiusura del conto. Tanto più numerosi sono i prelevamenti e sollecite le restituzioni tanto più grande è il tasso d'interesse che si viene a pagare.

Per i primi due casi si può adottare qualunque forma e la regola del metodo diretto. Per gli ultimi due è necessaria la forma scalare e la regola del metodo scalare coi capitali disposti in ordine di scadenza crescente anteriormente alla chiusura, decrescente per dopo. Se il conto è tenuto a numeri si deve notare che i numeri di segno opposto sono da dividere per divisori diversi, perciò non se ne può fare il *bilancio*. Tale avvertenza è da tenere presente anche per i numeri di sconto. Volendo fare il bilancio occorre moltiplicare i numeri per il tasso corrispondente, così diventano omogenei ed il D relativo è 36000.

157. — Quando le somme del conto sono espresse in moneta diversa da quella usata da chi tiene il conto, può sorgere per questi la convenienza o la necessità di convertire in questa moneta il risultato del conto (interessi e saldo) od anche i suoi elementi. Se si riduce solo il risultato si può adottare il cambio (in senso lato) che può convenire; se poi il saldo viene riscosso o pagato la conversione avviene di fatto. Se si riducono anche gli elementi del conto, si deve notare che i dati relativi si *aggiungono al conto*, il quale resta propriamente costituito dalle somme nell'altra moneta; e che, qualunque sia il modo di conversione, il risultato finale deve essere sempre lo stesso.

I modi seguiti sono due: 1° si adotta un cambio fisso per tutte le somme del conto; 2° si adotta un cambio variabile, quello della data dell'operazione e, quando è noto, un *cambio reale*, cioè quello corrispondente alle somme riscosse o pagate nella sua moneta da chi tiene il conto.

Col primo modo ad ogni gruppo di scritture basta aggiungere una colonna per le somme convertite, col secondo ne occorre un'altra per notare a fianco di ogni conversione il cambio in base al quale è stata fatta.

Adottando il cambio fisso, il saldo, convertito con esso, deve corrispondere anche a quello delle somme convertite; e se non viene riscosso o pagato ma entra come elemento del conto successivo non viene altrimenti valutato: in caso contrario si riduce al valore corrente secondo il modo di pagamento, rilevando nelle colonne delle somme convertite *una differenza di cambio*. Questo avverrà pure in generale adottando un cambio variabile.

158. — I calcoli di scadenza comune hanno occasione di essere da diversi contratti, di conto corrente (c/c), di deposito in c/c od a risparmio, di apertura di credito, di sovvenzione, ecc., *di distinta natura giuridica*, tuttavia la forma e le modalità del calcolo non dipendono dalla *natura* del contratto, ma dai patti che riguardano la valuta delle somme il tasso ed il modo di calcolare l'interesse.

Questi calcoli vengono ordinariamente chiamati *conti correnti*, ma vi ha *contratto di conto corrente* solo quando « due contraenti si concedono temporaneamente credito per le loro reciproche rimesse, affinchè colui che risulta creditore alla chiusura del conto possa esigere solamente la differenza tra il dare e l'avere [1] ».

All'infuori dei patti speciali che possono stipularsi tra le parti, hanno importanza: la fissazione della moneta in cui il conto deve essere tenuto, la natura delle operazioni da inscrivervi, il modo di determinarne la valuta [2], la durata del tempo

[1] Vivante, *Trattato di diritto commerciale*, vol. IV, 1720. Per gli effetti di questo contratto vedi *Codice di commercio*, art. 345 a 348.

[2] Il tasso *reale* del conto è strettamente legato alle convenute valute.

di frutto e gli interessi relativi, il segno che può avere il saldo, il suo massimo (o minimo) importo, il modo del suo pagamento.

Tra due persone possono esistere più contratti e conti correnti a condizioni differenti, riguardanti gruppi diversi di operazioni. Se uno dei contraenti, per alcune operazioni alla cui effettuazione ha più diretto interesse accetta le condizioni dell'altro, gli paga delle commissioni e delle provvigioni e lo rimborsa delle spese, riconosce la liquidazione fatta dall'altro, ecc., allora il conto si dice da esso *mio* o *nostro*, dall'altro contraente il conto è detto *suo* o *loro*.

La distinzione ha speciale importanza quando i contraenti usano moneta diversa, per il fatto del cambio, e anche quando sono soltanto su piazze lontane, per la diversità dei momenti in cui certi valori di per sè non fruttiferi rimessi da una parte all'altra cessano di essere a disposizione dell'una e vengono ad esserlo per l'altra. Così un vaglia rimesso da Milano a Palermo rappresenta una somma di cui il mittente non può più disporre dal momento della spedizione e che solo fra tre o più giorni sarà a disposizione del destinatario.

Il contraente per cui il conto è *suo* o *loro*, liquida il conto e manda l'*estratto* all'altro per il *benestare*. Le provvigioni dovute su alcune o su tutte le operazioni e le spese da rimborsare (bolli, postali, ecc.) da colui per cui il conto è *mio* vengono generalmente addebitate colla valuta del saldo.

METODO DIRETTO
FORMA VI.

Sig.r VITTORIO E. FRANCO di Bovino

DARE — v/ c/c con BALDASSARRE & L'ARAB di Foggia, chiuso il 30 giugno, 4 % — AVERE

DATA	OPERAZIONI	Valute	Giorni	Interessi e sconti		Capitali		DATA	OPERAZIONI	Valute	Giorni	Interessi e sconti		Capitali	
Gennaio 1	Resid. c/ vecchio	Dicem. 31	181	50	28	2.500	—	Genn. 10	m/ tratta 3 mesi	Aprile 10	81	18	—	2.000	—
Febbr. 15	m/ fatt. merci . .	Aprile 15	76	59	11	7.000	—	Aprile 10	v/ rim. effetto . .	Giugno 20	10	3	89	3.500	—
Giugno 4	m/ fatt. merci . .	Settem. 4	66	22	—	3.000	—	Maggio 15	m/ tratta 3 mesi	Agosto 15	46	10	22	2.000	—
Giugno 30	Int. v/ carico. . .					75	72	Giugno 30	Bilancio sconti .			11	78		
									Bilancio int. . .			75	72		
									v/deb. in c/nuovo	Giugno 30				5.075	72
				109	39	12.575	72					109	39	12.575	72
Luglio 1	Resid. c/ vecchio	Giugno 30				5.075	72								

LO STESSO, A NUMERI.

Gennaio 1		Dicem. 31	181	4525	2.500	—	Genn. 10		Aprile 10	81	1620	2.000	—
Febbr. 15		Aprile 15	76	5320	7.000	—	Aprile 10		Giugno 20	10	350	3.500	—
Giugno 4		Settem. 4	66	1980	3.000	—	Maggio 15		Agosto 15	46	920	2.000	—
Giugno 30	Int. v/ carico sul N. $\frac{6815}{90}$				75	72	Giugno 30	Bil. num. rossi . .			1060		
								Bil. num. neri . .			6815		
								v/deb. in c/nuovo	Giugno 30			5.075	72
				9845	12.575	72					9845	12.575	72
Luglio 1	Resid. c/ vecchio	Giugno 30			5.075	72							

METODO: A CHIUSURA PRESUNTA, EFFETTIVA ANTERIORE
FORMA VI. (31 luglio) (30 giugno)

DARE — AVERE

DATA	OPERAZIONI	Valute	Giorni	Interessi e sconti		Capitali		DATA	OPERAZIONI	Valute	Giorni	Interessi e sconti		Capitali	
Genn. 10		Dicem. 31	202	58	89	2.500	—	Genn. 10		Aprile 10	112	24	89	2.000	—
Febbr. 15		Aprile 15	107	83	22	7.000	—	Aprile 10		Giugno 20	41	15	94	3.500	—
Giugno 4		Settem. 4	35	11	67	3.000	—	Maggio 15		Agosto 15	15	3	33	2.000	—
Giugno 30	Int. v/ carico . . .					75	72	Giugno 30	Int. sul bil. provv. capitali L. 5000	Giugno 30	31	17	22		
								» »	Bilancio sconti . .			8	34		
								» »	Bilancio interessi			75	72		
								» »	v/deb. in c/nuovo	Giugno 30				5.075	72
				142	11	12.575	72					142	11	12.575	72

FORMA IV A NUMERI.

DATA	OPERAZIONI	Capitali Dare		Capitali Avere		VALUTE	Giorni	Numeri Dare	Numeri Avere
Gennaio 1	Residuo c/ vecchio	2.500	—			Dicembre 31	212	5.300	
Gennaio 10	m/ tratta 3 mesi			2.000	—	Aprile 10	112		2.240
Febbraio 15	m/ fatt. merci	7.000	—			Aprile 15	107	7.490	
Aprile 10	v/ rimessa effetto			3.500	—	Giugno 20	41		1.435
Maggio 15	m/ tratta 3 mesi			2.000	—	Agosto 15	15	300	
Giugno 4	m/ fatt. merci	3.000	—			Settembre 4	35		1.050
Giugno 30	Num. sul B. P. C. L. 5000 . .					Giugno 30	31		1.550
» »	Bil. num. ed interessi v/ carico	75	72						6.815
» »	v/ debito in c/ nuovo			5.075	72	» »			
		12.575	72	12.575	72			12.790	12.790

METODO: A CHIUSURA PRESUNTA, EFFETTIVA POSTERIORE
FORMA II. (10 giugno) (30 giugno)

DATA	OPERAZIONI	Segni	CAPITALI		VALUTE	Giorni	NUMERI Dare	NUMERI Avere
Gennaio 1	Residuo c/ vecchio	D	2.500	—	Dicembre 31	161	4.025	
Gennaio 10	m/ tratta 3 mesi	A	2.000	—	Aprile 10	61		1.220
		D	500	—	Giugno 10			
Febbraio 15	m/ fattura merci	D	7.000	—	Aprile 15	56	3.920	
		D	7.500	—	Giugno 10			
Aprile 10	v/ rimessa effetto	A	3.500	—	Giugno 20	10	350	
		D	4.000	—	Giugno 10			
Maggio 15	m/ tratta 3 mesi	A	2.000	—	Agosto 15	66	1.320	
		D	2.000	—	Giugno 10			
Giugno 4	m/ fattura merci	D	3.000	—	Settembre 4	86		2.580
		D	5.000	—	Giugno 10			
Giugno 30	Num. di corr. sul Bil. Cap. dal 10 al 30 giugno					20	1.000	
Giugno 30	Int. v/ carico sul Bil. N. $\frac{6815}{90}$	D	75	72				6.815
Luglio 1	v/ Deb. in c/ nuovo	D	5.075	72	Giugno 30		10.615	10.615

METODO INDIRETTO
FORMA VI.

DARE — AVERE

DATA	OPERAZIONI	Valute	Giorni	Numeri	Capitali		DATA	OPERAZIONI	Valute	Giorni	Numeri	Capitali	
Gennaio 1		Dicem. 31	Epoca		2.500	—	Genn. 10		Aprile 10	100	2.000	2.000	—
Febbr. 15		Aprile 15	105	7.350	7.000	—	Aprile 10		Giugno 20	171	5.985	3.500	—
Giugno 4		Settem. 4	247	7.410	3.000	—	Maggio 15		Agosto 15	227	4.540	2.000	—
Giugno 30	Bil. num. ed int.						Giugno 30	Num. sul bil. prov. cap. L. 5000 . . .	Giugno 30	181	9.050		
	v/ carico su $\frac{6815}{90}$			6.815	75	72	» »	v/ deb. in c/ nuovo	» »			5.075	72
				21.575	12.575	72					21.575	12.575	72

FORMA IV.

DATA	OPERAZIONI	Capitali Dare		Capitali Avere		VALUTE	Giorni	Numeri Dare	Numeri Avere
Gennaio 1		2.500	—			Dicembre 31	Epoca		
Gennaio 10				2.000	—	Aprile 10	100	2.000	
Febbraio 15		7.000	—			Aprile 15	105		7.350
Aprile 10				3.500	—	Giugno 20	171	5.985	
Maggio 15				2.000	—	Agosto 15	227	4.540	
Giugno 4		3.000	—			Settembre 4	247		7.410
Giugno 30	Num. sul B. P. C. L. 5000 . .					Giugno 30	181	9.050	
» »	Int. v/ carico s. B. N. $\frac{6815}{90}$ . .	75	72						6.815
» »	v/ deb. in c/ nuovo			5.075	72	Giugno 30			
		12.575	72	12.575	72			21.575	21.575

METODO SCALARE: OP. IN ORDINE DI SCADENZA
FORMA II.

DATA	OPERAZIONI	Segni	CAPITALI		VALUTE	Giorni	NUMERI Dare	NUMERI Avere
		D	2.500	—	Dicembre 31	100	2.500	
		A	2.000	—	Aprile 10			
		D	500	—	» »	5	25	
		D	7.000	—	Aprile 15			
		D	7.500	—	» »	66	4.950	
		A	3.500	—	Giugno 20			
		D	4.000	—	» »	10	400	
Giugno 30	Saldo capitali già scaduti . . .	D	4.000	—	Giugno 30			
		D	3.000	—	Settembre 4	**20**		600
		A	2.000	—	Agosto 15			
		D	1.000	—	» »	**46**		460
» »	Saldo capitali non ancora scaduti	D	1.000	—	Giugno 30			
» »	Ripresa del saldo precedente . .	D	4.000	—	» »			
		D	5.000	—	» »			
» »	Int. v/ carico sul Bil. num. $\frac{6815}{90}$	D	75	72				6.815
Luglio 1	v/ debito in c/ nuovo	D	5.075	72	Giugno 30		7.875	7.875

METODO SCALARE: OP. IN ORDINE QUALUNQUE
FORMA II.

DATA	OPERAZIONI	Segni	CAPITALI		VALUTE	Giorni	NUMERI Dare	NUMERI Avere
		D	2.500	—	Dicembre 31	105	2.625	
		D	7.000	—	Aprile 15			
		D	9.500	—	» »	**5**		475
		A	2.000	—	Aprile 10			
	(L'ordine delle operazioni è di-	D	7.500	—	» »	71	5.325	
	verso da quello delle date per	A	3.500	—	Giugno 20			
	sola comodità dimostrativa del-	D	4.000	—	» »	76	3.040	
	l'esempio).	D	3.000	—	Settembre 4			
		D	7.000	—	» »	**20**		1.400
		A	2.000	—	Agosto 15			
		D	5.000	—	» »	**46**		2.300
Giugno 30	Saldo capitali	D	5.000	—	Giugno 30			
» »	Int. v/ carico sul Bil. num. $\frac{6815}{90}$	D	75	72				6.815
Luglio 1	v/ debito in c/ nuovo	D	5.075	72	Giugno 30		10.990	10.990

METODO DIRETTO: TASSO VARIO
FORMA VI.

Sig. COSTANTINO CAPOZZI di Vicenza

DARE — v/ c/c con MENICHELLA & TANDOIA di Lucera, chiuso il 30 giugno — AVERE

Data	Operazioni	Valute	Giorni	Numeri	Capitali		Data	Operazioni	Valute	Giorni	Numeri	Capitali	
Gennaio 1	6 %	Dicem. 31	100	3000	3.000	—	Gennaio 5	6 %	Maggio 30			6.000	—
Genn. 10		Aprile 15			3.000	—							
Febbr. 15		Marzo 8	33	330	1.000	—	Genn. 15		Febbr. 20	49	2450	5.000	—
Aprile 10	Int. v/ car. $\frac{860}{60}$ = 14,33						Febbr. 20		Aprile 8	2	20	1.000	—
» »	Bilancio partite scad.	Aprile 10			2.000	—	Aprile 10	Bilancio numeri . . .			860		
				3300	6.000	—					3300	6.000	—
Aprile 11	5 %						Aprile 11	5 %					
Genn. 10	Partita ripresa	Aprile 15	76	2280	3.000	—	Gennaio 5	Partita ripresa	Maggio 30	31	1860	6.000	—
Aprile 25		Agosto 15	46	3220	7.000	—	Aprile 11	Saldo precedente. . .	Aprile 10	81	1620	2.000	—
Maggio 20		Giugno 25	5	40	800	—	Maggio 8		Luglio 7	7	350	5.000	—
Giugno 30	Bilancio numeri neri			3830			Giugno 25		Luglio 20	20	200	1.000	—
» »	v/ cred. in c/ nuovo	Giugno 30			3.238	87	Giugno 30	Bilancio numeri rossi			2670		
							» »	Inter. v/ favore sul N. $\frac{3830}{72}$ = . . . 53,20					
								— Int. v/ carico 14,33				38	87
				6150	14.038	87					6150	14.038	87
							Luglio 1	v/ residuo credito . .	Giugno 30			3.238	87

METODO: A CHIUSURA PRESUNTA, TASSO VARIO
FORMA VI.

DARE — AVERE

Data	Operazioni	Valute	Giorni	Inter. e sconti		Capitali		Data	Operazioni	Valute	Giorni	Inter. e sconti		Capitali	
Gennaio 1	6 %	Dicem. 31	181	90	50	3.000	—	Gennaio 5	6 %	Maggio 30	31	31	—	6.000	—
Genn. 10		Aprile 15	76	38	—	3.000	—								
								Genn. 15		Febbr. 20	130	108	33	5.000	—
Febbr. 15		Marzo 8	114	19	—	1.000	—	Febbr. 20		Aprile 8	83	13	84	1.000	—
Aprile 10	Int. di corr. sul Bil. prov. part. scad.: 2000	Aprile 10	81	27	—			Aprile 10							
» »	Bilancio part. scad.	» »				2.000	—								
						6.000	—							6.000	—
	5 %								5 %						
Genn. 10	Partita ripresa	Aprile 15	76	31	67	3.000	—	Gennaio 5	Partita ripresa	Maggio 30	31	25	83	6.000	—
Aprile 25		Agosto 15	46	44	72	7.000	—	Aprile 11	Saldo precedente. . .	Aprile 10	81	22	50	2.000	—
Maggio 20		Giugno 25	5	—	56	800	—	Maggio 8		Luglio 7	7	4	82	5.000	—
Giugno 30	Bilancio interessi . .			38	89			Giugno 25		Luglio 20	20	2	78	1.000	—
» »	v/ cred. in c/ nuovo	Giugno 30				3.238	89	Giugno 30	Bilancio sconti			37	12		
								» »	Int. v/ favore					38	89
				207	62	14.038	89					207	62	14.038	89
								Luglio 1	Residuo c/ vecchio. .	Giugno 30				3.328	89

METODO SCALARE: OP. IN ORDINE DI SCADENZA, TASSO VARIO FORMA VII.

Data	Operazioni	Segni	Capitali	Valute	Giorni	Interessi Dare	Interessi Avere
Gennaio 1	6 %	D	3000 —	Dicem. 31	51	25 50	
Genn. 15		A	5000 —	Febbr. 20			
		A	2000 —	» »	16		5 33
Febbr. 15		D	1000 —	Marzo 8			
		A	1000 —	» »	31		5 17
Febbr. 20		A	1000 —	Aprile 8			
		A	2000 —	» »	2		— 67
Aprile 10	5 %	A	2000 —	Aprile 10	5		1 39
Genn. 10		D	3000 —	Aprile 15			
		D	1000 —	» »	45	6 25	
Aprile 5		A	6000 —	Maggio 30			
		A	5000 —	» »	26		18 06
Maggio 20		D	800 —	Giugno 25			
		A	4200 —	» »	5		2 92
Giugno 30	Saldo capit. scad.	A	4200 —	Giugno 30			
Aprile 25		D	7000 —	Agosto 15	26		25 28
Giugno 25		A	1000 —	Luglio 20			
		D	6000 —	» »	13		10 83
Maggio 8		A	5000 —	Luglio 7			
		D	1000 —	» »	7		— 97
Giugno 30	Saldo cap. non scad.	D	1000 —	Giugno 30			
» »	Saldo precedente	A	4200 —	» »			
» »		A	3200 —	» »			
» »	Inter. v/ favore .	A	38 87	» »	38	87	
Giugno 30	v/cred. in c/nuovo	A	3238 87	Giugno 30	70	62 70	62

METODO SCALARE: ORD. SCAD., TASSO NON RECIPROCO, SUI SALDI, SEC. IL SEGNO DEGLI INTERESSI FORMA II.

DATA	OPERAZIONI	Segni	CAPITALI		VALUTE	Giorni	NUMERI Dare 6 %	NUMERI Avere 8 %
		D	2.500	—	Dicembre 31	100	2 500	
		A	2.000	—	Aprile 10			
		D	500	—	» »	5	250	
		A	7.000	—	Aprile 15			
		A	6.500	—	» »	66		4.200
		D	3.500	—	Giugno 20			
		A	3 000	—	» »	10		300
		A	3.000	—	Giugno 30			
Giugno 30	Saldo capitali già scaduti . . .	D	2.000	—	Settembre 4	**20**		400
		A	5.500	—	Agosto 15			
		A	3.500	—	» »	**38**	1.330	
		D	4.000	—	Luglio 8			40
		D	500	—	» »	**8**		
Giugno 30	Saldo capitali non ancora scaduti	D	500	—	Giugno 30		4.080	5.030
» »	Saldo precedente	A	3.000	—	» »		× 6	× 3
		A	2.500	—	» »		21.480	15.090
	Int. v/ carico $\frac{9390}{360}$	D	26	08	» »			9.390
Giugno 30	v/ credito in c/ nuovo . . .	A	2.473	92	Giugno 30		24.480	24.480

METODO SCALARE
TASSO VARIO, NON RECIPROCO SECONDO IL SEGNO D'INT. SUI SALDI.

Data	Operazioni	Segni	Capitali		Valute	Giorni	Numeri × r		Interessi			
							Dare	Avere	Dare		Avere	
							6 %	4 %	6 %		4 %	
Gennaio 1		D	3000	—	Dicem. 31	51	9.180		25	50		
Genn. 12		A	5000	—	Febbr. 20							
		A	2000	—	» »	16		1.280			3	56
Febbr. 5		D	1000	—	Marzo 8							
		A	1000	—	» »	31		1.240			3	44
Marzo 15		A	1000	—	Aprile 8							
		A	2000	—	» »	2		160			—	44
							5 %	3 %	5 %		3 %	
Aprile 10	Camb. dei tassi .	A	2000	—	Aprile 10	5		300			—	83
Marzo 10		D	3000	—	Aprile 15							
		D	1000	—	» »	45	2.250		6	25		
Aprile 20		A	6000	—	Maggio 30							
		A	5000	—	» »	26		3.900			10	83
Maggio 25		D	800	—	Giugno 25							
		A	4200	—	» »	5		630			1	76
Giugno 30	Saldo capit. scad.	A	4200	—	Giugno 30							
Maggio 31		D	3000	—	Agosto 15	26		2.340			6	50
Giugno 25		A	4000	—	Luglio 20							
		A	1000	—	» »	13	650		1	80		
Giugno 15		A	2000	—	Luglio 7							
		A	3000	—	» »	7	1.050		2	92		
Giugno 30	Saldo cap. non scad.	A	3000	—	Giugno 30							
» »	Saldo precedente	A	4200	—	» »							
» »		A	7200	—	» »							
» »	Int. v carico $\frac{3280}{360}$	D	9	11	» »			3.280			9	11
Luglio 1	v/cred. in c/ nuovo	A	7190	89	Giugno 30		13.130	13.130	36	47	36	47

METODO DIRETTO: INT. A MESI INTERI
FORMA II.

DOMENICO MANGANARO & F.lli, Banchieri - Milano
Conto di deposito a risparmio del Signor U. MASCIA - 3 %

DATA	OPERAZIONI	Segni	CAPITALI		VALUTE	Mesi	INTERESSI	
							Dare	Avere
Gennaio 1	Residuo c/ vecchio	A	3.000	—	Dicembre 31	6		45 —
Gennaio 10	Depositate	A	5.000	—	Gennaio 31	5		62 50
		A	8.000	—				
Gennaio 25	Prelevate	D	7.000	—	Dicembre 31	6	105 —	
		A	1.000	—				
Marzo 10	Depositate	A	6.000	—	Marzo 31	3		45 —
		A	7.000	—				
Marzo 15	Prelevate	D	5.000	—	Febbraio 28	4	50 —	
		A	2.000	—				
Maggio 8	Prelevate	D	1.500	—	Aprile 30	2	7 50	
		A	500	—				
Maggio 27	Depositate	A	3.000	—	Maggio 31	1		7 50
		A	3.500	—				
Giugno 15	Depositate	A	3.000	—	Giugno 30	—	— —	
		A	6.500	—				
Giugno 23	Prelevate	D	1.000	—	Maggio 31	1	2 50	
		A	5.500	—				
Giugno 30	Interessi capitalizzati	D	5	—				5 —
Luglio 1	Residuo in c/ nuovo	A	5.495	—	Giugno 30		165 —	165 —

(In questo e nel successivo esempio è stato scelto il *mese* per semplicità ed efficacia dimostrativa).

METODO SCALARE: INT. SUI MINIMI SALDI PERIODICI

G. CIARLETTA & F. A. FORMATO, Banchieri - S. Severo e Foggia
Conto di deposito a risparmio del Sig. CIRO FIORE, al 3 %

DATA	OPERAZIONI	Segni	CAPITALI		Minimi saldi mensili Mese	Somma		Interessi	
Gennaio 1	Residuo c/ vecchio	A	3.000	—					
Gennaio 10	Depositate	A	5.000	—					
		A	8.000	—					
Gennaio 25	Prelevate	D	7.000	—					
		A	1.000	—					
Marzo 10	Depositate	A	6.000	—	Gennaio	1.000	—	2	50
		A	7.000	—	Febbraio	1.000	—	2	50
Marzo 15	Prelevate	D	5.000	—					
		A	2.000	—					
Maggio 8	Prelevate	D	1.500	—	Marzo	1.000	—	2	50
		A	500	—	Aprile	2.000	—	5	—
Maggio 27	Depositate	A	3.000	—					
		A	3.500	—					
Giugno 15	Depositate	A	3.000	—	Maggio	500	—	1	25
		A	6.500	—					
Giugno 23	Prelevate	D	1.000	—					
		A	5.500	—	Giugno	3.500	—	8	75
Giugno 30	Interessi capitalizzati	A	22	50				22	50
Luglio 1	Residuo in c/ nuovo	A	5.522	50					

MONETA ESTERA — CAMBIO VARIABILE
METODO DIRETTO — FORMA VI.

Sigg. JOHN SMITH & Co. - Londra
n/ c/c al 5 % chiuso al 30 giugno 1920

DARE — AVERE

Data	Operazioni	Valute	Giorni	Interessi L.st	Capitali L.st	Cambio	Capitali L.it
Marzo 10		Marzo 15	107	1 9 4	100 8 10	85	8537 40
Aprile 18		Giugno 20	10	— 5 11	215 12 5	90	19405 80
Aprile 20		Agosto 19	50	— 12 11	94 3 6	92	8664 —
Maggio 6		Maggio 20	41	— 19 4	172 — 9	89	15311 21
Giugno 30	Bil. Sconti . .	—	—	1 8 4	— — —	—	— —
» »	Bil. Interessi	—	—	1 4 11	— — —	—	— —
» »	Bil. Capitali .	Giugno 30	—	— — —	136 2 6	82	11162 17
				5 7 10	718 7 6		63080 58

Data	Operazioni	Valute	Giorni	Interessi L.st	Capitali L.st	Cambio	Capitali L.it
Gennaio 1		31-XII-19	181	4 19 5	200 8 7	75	15032 10
Febbr. 10		Maggio 10	51	— 8 5	50 15 3	795	4035 58
Aprile 8		Luglio 8	8	— 6 7	290 7 9	89,75	26062 14
Giugno 10		Settem. 10	72	1 14 8	175 10 6	86	15095 06
Giugno 30	Int. v/ fav. .	—	—	— — —	1 4 11	82	102 —
—	—	—	—	— — —	— — —	—	— —
Giugno 30	Perd. cambio	—	—	— — —	— — —	—	2753 70
				5 7 10	718 7 6		63080 58
Luglio 1	Res. c/ vecchio	Giugno 30			136 2 6	82	11162 17

MSH 00056
NEH
JAN 3 1994
JAN 1994
COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
0041417402
DEC 21 1926

END OF
TITLE